Задания и решения заочного тура олимпиады
«Будущие исследователи – будущее науки» по математике

1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

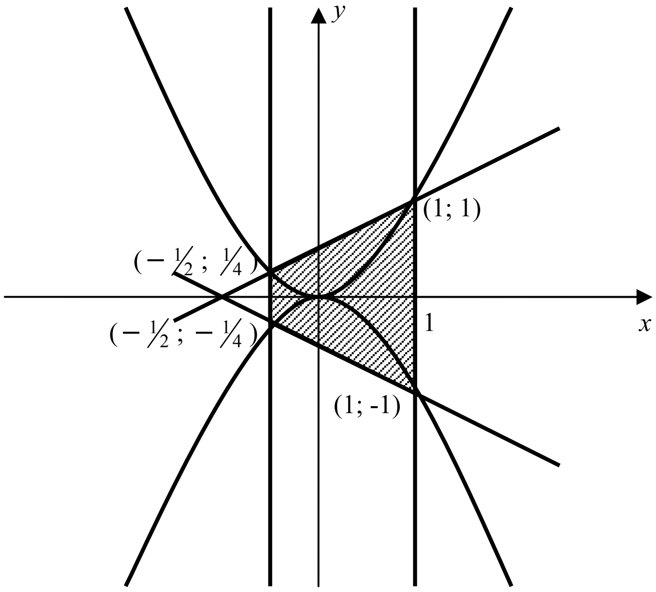
$$\left|y - x^2\right| + \left|y + x^2\right| \le 1 + x .$$

Ответ: $\dfrac{15}{8}$.

Решение: Рассматривая различные варианты раскрытия модулей получаем следующую совокупность четырех систем, эквивалентную исходному неравенству:

$$\begin{cases} y - x^2 \ge 0, \\ y + x^2 \ge 0, \\ 2y \le 1 + x; \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x^2 < 0, \\ y + x^2 \ge 0, \\ 2x^2 - x - 1 \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x^2 \ge 0, \\ y + x^2 < 0, \\ 2x^2 + x + 1 \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x^2 < 0, \\ y + x^2 < 0, \\ -2y \le 1 + x. \end{cases}$$

Графической иллюстрацией является следующая картинка:



Заштрихованная фигура описывает решение совокупности систем, она представляет собой равнобедренную трапецию, вершины которой имеют координаты $(1; -1)$, $(1; 1)$, $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$. Отсюда легко вычисляется площадь фигуры.

2. Решить неравенство

$$3\sin x \ge \sqrt{2}\sin 2x + 3\cos x + \sqrt{32} .$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ **.**

Решение:

Данное неравенство преобразуется к эквивалентному

$$3\sin(x - \tfrac{\pi}{4}) \ge \sin 2x + 4 . \qquad (1)$$

Так как при всех действительных x

$$-3 \le 3\sin(x - \tfrac{\pi}{4}) \le 3 ,$$

$$3 \le \sin 2x + 4 \le 5 ,$$

то неравенство (1) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} 3\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 3, \\ \sin 2x + 4 = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z. \end{cases}$$

3. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Построить (с помощью циркуля и линейки) на стороне *AC* такую точку *M*, для которой расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников *ABM* и *CBM*, будет наименьшим.

Решение. Пусть точки *P* и *Q* – центры окружностей, описанных около треугольников *ABM* и *CBM* соответственно. Поскольку *P* и *Q* лежат на серединных перпендикулярах к отрезкам *AM* и *CM*, длина проекции отрезка *PQ* на прямую *AC* равна половине длины отрезка *AC*, т.е. длина проекции – это величина постоянная (не зависящая от положения точки *M*). Таким образом, длина *PQ* будет минимальной, когда *PQ* совпадает по длине со своей проекцией. Это равносильно тому, что прямые *PQ* и *AC* параллельны, а значит, в силу того, что *PQ* является серединным перпендикуляром к *BM,* точка *M* есть проекция вершины *B* на основание *AC*. Итак, осталось построить с помощью циркуля и линейки перпендикуляр на *AC* из точки *B* (это стандартная задача на построение).

4. Найти наименьший член числовой последовательности $a_n = \log_3 n \cdot (\log_3 n - 3)$.

Ответ: $a_5 = \log_3 5 \cdot (\log_3 5 - 3)$.

Решение. Рассмотрим неравенство $a_n < a_{n+1}$. Оно равносильно (после подстановки выражения для a_n и прибавления одинаковых слагаемых к обеим частям неравенства) такому

3 ($\log_3(n+1) - log_3 n$) < ($\log_3(n+1) + log_3 n$) ($\log_3(n+1) - log_3 n$).

Поделив обе части полученного неравенства на положительное число ($\log_3(n+1) - log_3 n$) и используя формулу логарифма произведения, будем иметь равносильное неравенство $3 < \log_3(n+1)n$, т.е. $27 < (n+1)n$. При натуральных *n* правая часть последнего неравенства монотонно возрастает, а значения её при n=4 и *n*=5 равны соответственно, 20 и 30. Таким образом, наименьшее значение *n,* для которого оно выполняется, равно 5. Это означает, что последовательность a_n возрастает, начиная с *n*=5, а при n<5 она убывает, достигая наименьшего значения $a_5 = \log_3 5 \cdot (\log_3 5 - 3)$.

5. К натуральному четырехзначному числу n (в десятичной записи) приписали слева несколько цифр и получили n^2. Найдите все такие n.

Ответ: 9376.

Решение. Условие задачи равносильно делимости числа n^2 - *n* на 1000 = $2^4 5^4$, т.е. $n(n-1)$ делится на $2^4 5^4$. Значит, из двух соседних чисел *n* и *n*-1 чисел одно (нечетное) делится на 625, а другое (четное) – на 16. Рассмотрим сначала случай, когда *n-1* делится на 625, т.е.*n*=625*k*+1, где *k* – натуральное. Далее можно было бы сделать небольшой перебор нечетных четырехзначных чисел, кратных 625, но можно обойтись и без перебора, заметив следующее. Поскольку остаток при делении 625 на 16 равен 1, то остаток при делении *n*=625*k*+1 на 16 равен *k*+1. Значит, *k*+1=16 (при большем *k* получится число с большим, чем 4, числом знаков). В результате получим искомое число *n* = 625 · 15 + 1 = 9376.

Во втором случае, когда *n*=625*k,* аналогично получим, что *n*-1 при делении на 16 дает остаток *k*-1, но в этом случае ни значение k=1, ни значение k=17 не приводят к результату (т.к. получается трехзначное или пятизначное число)

6. Существует ли такое число *x*, что $\sin x$ – число иррациональное, а $\sin 3x$ – положительное рациональное число, меньшее 0.1?

Ответ: существует.

Решение. Записав формулу синуса тройного угла и обозначив $\sin x = t$, будем иметь $\sin 3x = 3t - 4t^3$. Таким образом, задача сводится к доказательству существования иррационального корня уравнения $3t - 4t^3 = a$ при некотором положительном рациональном *a*, меньшем 0.1. Возьмем, например a=1/16. Тогда соответствующее уравнение $64t^3 - 48t + 1 = 0$ имеет корень на отрезке [0; 1/2] (поскольку левая часть принимает на концах этого отрезка значения разных знаков). Но рациональных корней на данном отрезке уравнение не имеет: чтобы в этом убедиться, достаточно подставить значения t, равные 1/4, 1/8, 1/16, 1/64 (напомним, что рациональный корень уравнения с целыми коэффициентами представляет собой дробь, числитель которой – делитель свободного члена, а знаменатель – делитель старшего коэффициента).

7. В классе 25 учеников участвовало в математической олимпиаде. По итогам олимпиады оказалось, что среди любых 9 учеников найдутся хотя бы трое, набравшие одинаковое количество баллов. Докажите, что в классе найдутся 7 учеников с одинаковым количеством баллов.

Решение. Разобьем учеников на группы в соответствии с набранными ими баллами. Требуется доказать, что хотя бы в одной из групп не менее 7 учеников.

Если имеется всего не более четырех групп, то результат следует из принципа Дирихле (или из рассуждения от противного, поскольку в противном случае в классе было бы не более $6 \cdot 4$=24 учеников).

Рассмотрим случай, когда имеется ровно 5 групп. Удалив по человеку из этих групп, рассмотрим оставшихся 20 человек. Если среди них есть представители четырех групп, то мы придем к противоречию с условием задачи, взяв этих четырех и добавив к ним 5 удалённых, т.к. среди этих 9 человек нельзя найти троих из одной группы. Значит, эти 20 человек представляют не более трёх групп. И тогда среди них по принципу Дирихле найдутся 7 человек из одной группы (иначе там было бы не более $6 \cdot 3$=18 < 20 человек.) Заметим, что в этом случае даже можно добавить восьмого человека из той же группы, находящегося среди 5 удаленных.

Если имеется 6 групп, то, рассуждая аналогично и удалив 6 человек из разных групп, получим 19 человек, среди которых не может быть представителей трех групп. А значит, из этих 19 человек, представляющих две (или менее) группы, легко находятся семь человек (и даже 10, а значит и 11, если добавить одного из удаленных) из одной группы.

Случай семи групп совсем прост (он, очевидно, приводит к единственной ситуации, когда в одной из групп 19 человек, а в остальных – по одному). Случаи восьми или девяти групп сразу противоречат условию.

8. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\sqrt[8]{(x^2 + ax + 1)(x - a)} = \log_2 \left| \frac{x^2 + (a-1)x + a + 1}{x^2 + (a+1)x + 1 - a} \right|.$$

Ответ:

$$x = a\,,\ x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \text{ при } |a| > 2\,,$$
$$x = -2\,,\ x = 1 \text{ при } a = -2\,,$$
$$x = a \text{ при } |a| < 2\,,$$
$$x = 2\,,\ x = -1 \text{ при } a = 2\,.$$

Решение:

ОДЗ:

$$\begin{cases}(x-a)(x^2+ax+1)\ge 0,\\ x^2+(a-1)x+a+1\ne 0,\\ x^2+(a+1)x+1-a\ne 0.\end{cases}$$

Так как левая часть уравнения неотрицательна, то

$$\left|\frac{x^2+(a-1)x+a+1}{x^2+(a+1)x+1-a}\right|\ge 1$$

Тогда

$$\left|x^2+(a-1)x+a+1\right|\ge\left|x^2+(a+1)x+1-a\right|.$$

Возводя в квадрат, получаем

$$(x^2+(a-1)x+a+1)^2\ge(x^2+(a+1)x+1-a)^2$$

$$(x^2+(a+1)x+1-a)^2-(x^2+(a-1)x+a+1)^2\le 0,$$

$$(x-a)(x^2+ax+1)\le 0.$$

Сравнивая полученное неравенство с первым соотношением ОДЗ, заключаем:

$$(x-a)(x^2+ax+1)=0.$$

Рассмотрим два случая:

1)

$$\begin{cases}(x-a)=0,\\ x^2+(a-1)x+a+1\ne 0,\\ x^2+(a+1)x+1-a\ne 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x=a,\\ x^2+(a-1)x+a+1\ne 0,\\ x^2+(a+1)x+1-a\ne 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=a,\\ 2a^2+1\ne 0.\end{cases}$$

Следовательно, $x=a$ – решение при любом a.

2)

$$\begin{cases}(x^2+ax+1)=0,\\ x^2+(a-1)x+a+1\ne 0,\\ x^2+(a+1)x+1-a\ne 0.\end{cases}$$

Вычитая из второй и третьей строчки первую, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases}x^2+ax+1=0,\\ x-a\ne 0,\\ x-a\ne 0.\end{cases}$$

Так как $x=a$ не является корнем уравнения

$$x^2+ax+1=0,$$

корни которого

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$$

существуют при $a^2-4\ge 0$, то решениями последней системы будут

$$x=\pm 1 \text{ при } a=\mp 2;$$

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2} \text{ при } |a|>2$$

$$\text{и } \varnothing \text{ при } |a|<2 .$$

Объединив все полученные решения, получаем ответ.

9. Дан неравнобедренный треугольник *ABC*. Окружность с центром в точке *A* пересекает ровно две стороны этого треугольника, причем точки пересечения являются серединами соответствующих сторон. Может ли $\angle A$

   а) равняться $104°$?

   б) равняться $105°$?

Ответ: а) может. б) нет.

Решение. Окружность пересекает ровно одну из сторон с вершиной *A* (иначе треугольник был бы равнобедренным). Пусть это будет сторона *AB,* и пусть *M* – середина *AB*. Далее, пусть N – середина *BC*, *R* – радиус окружности, $\angle A=\alpha$. Тогда в треугольник *ABC* сторона АС параллельна средней линии *MN,* треугольник *MAN* – равнобедренный (*AM* = *AN* = *R*). Поэтому $\angle AMN = \angle ANA = 180° - \alpha$ и $\angle MAN = 180° - 2\alpha = 2\alpha - 180°$. Тогда $MN = 2R\sin\frac{\angle MAN}{2} = 2R\sin(\alpha-90°)$. Таким образом, из условия задачи о том, что окружность не пересекает сторону *AC,* получаем, что $2MN < R$, т.е. $2R\sin(\alpha-90°) < R/2$, или $\sin(\alpha-90°)<1/4$.

Итак, задача сводится к проверке последнего неравенства для указанных в условии углов. В случае б) неравенство не выполняется. Действительно, докажем, что $\sin 15° > 1/4$. После возведения в квадрат получим равносильное (в силу положительности обеих частей) неравенство $\frac{1-\cos 30°}{2} > 1/16$, или $1-\frac{\sqrt{3}}{2} > 1/8$, что равносильно очевидному неравенству $4\sqrt{3} < 7$ (оно проверяется возведением в квадрат). Итак, случай б) невозможен.

В случае а) воспользуемся известным неравенством *sin x* < *x*, справедливым для всех положительных чисел *x* (здесь подразумевается, что угол *x* измерен в радианах). Это неравенство геометрически (с оценкой площади) доказывается в некоторых школьных учебниках (и конечно, во всех учебниках по математическому анализу и высшей математике – в данной работе участникам олимпиады доказательство можно было опустить. Отметим, что это неравенство можно доказать и с помощью производной, рассматривая функцию *y*= *x* – *sin x* при неотрицательных *x*, эта функция имеет неотрицательную производную и обращается в нуль при *x*=0 .). Итак, докажем, что $\sin 14° < 1/4$, т.е. $\sin(2\pi\frac{14}{360}) < \frac{1}{4}$. В силу сказанного, для этого достаточно доказать, что $2\pi\frac{14}{360} < \frac{1}{4}$, или $14\pi < 45$. Справедливость последнего неравенства следует из того, что $\pi < 3.15$. В заключение, требуется указать построение соответствующего примера для угла $104°$. Для этого проведем произвольную окружность с центром в точке *A* и построим два луча, *t* и *s,* из точки *A* под углом $104°$ друг к другу. Обозначим через *M* точку пересечения луча t с окружностью и отложим на луче *t* отрезок *AB = 2 AM*. Через точку *M* проведем прямую, параллельную лучу s и обозначим через *N* вторую точку пересечения с окружностью этой прямой. Точку пересечения прямой *BN* с лучом *s* обозначим через *C*. В силу построения и доказанного выше неравенства получим треугольник *ABC* с указанными в условиях задачи свойствами (в частности, *C* лежит внутри круга).

10. Дан правильный 2009-угольник $A_1A_2...A_{2009}$. Рассматриваются всевозможные треугольники вида $A_iA_jA_k$ (i, j, k – числа от 1 до 2009), и пусть N – количество остроугольных треугольников, M – количество тупоугольных треугольников. Доказать, что $0.333 < \frac{N}{M} < 0.334$.

Решение. Обозначим n=1004. Всего количество треугольников равно C_{2n+1}^3 (число сочетаний из $2n$+1 по 3), т.к. каждый треугольник однозначно определяется неупорядоченным выбором трёх точек. Подсчитаем число M тупоугольных треугольников. Каждый такой треугольник PQS однозначно определяется заданием вершины тупого угла, скажем Q (пусть точки P, Q, S следуют в указанном порядке, если идти против часовой стрелки). Зафиксируем вершину Q тупого угла и подсчитаем возможные расположения точек S и P. Если S – вершина, соседняя с Q в многоугольнике, то для точки P есть (n–1) возможностей (чтобы угол PQS был тупым) – а именно, (n–1) вершин многоугольника, следующих за Q по часовой стрелке. Далее, если между Q и S есть одна вершина многоугольника, то для точки P есть (n–2) возможностей, и так далее. В результате, для фиксированной вершины Q тупого угла получим $(n-1)+(n-2)+...+1=\frac{n(n-1)}{2}$ треугольников. А значит, произвольно выбирая положение точки Q, получим M=(2n+1)n(n–1)/2. Тогда $N = C_{2n+1}^3 - M = \frac{1}{6}(2n+1)2n(2n-1) - \frac{1}{2}(2n+1)n(n-1) = \frac{1}{6}(2n+1)n(n+1)$ и поэтому $\frac{N}{M} = \frac{n+1}{3(n-1)} = \frac{1005}{3009}$. Легко проверить, что это число находится между 0.333 и 0.334.