ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2016-2017
Физика, I тур, вариант 1
РЕШЕНИЯ

7 класс

1. (40 баллов) Две одинаковые шайбы скользят без трения по горизонтальной поверхности между стенками, находящимися на расстоянии L друг от друга, в перпендикулярном к стенкам направлении. При соударениях шайб со стенками и между собой их скорости мгновенно изменяют направление на противоположное, оставаясь постоянными по величине. Найти время между двумя последовательными соударениями шайб, если их скорости равны V (20 баллов). На каком расстоянии от стенок происходят соударения шайб, если половину времени между двумя последовательными соударениями шайбы движутся в одном направлении (20 баллов)?

Ответ: Время между двумя последовательными соударениями равно L/V. Соударения происходят на расстоянии $L/4$ то от одной, то от другой стенки.

Решение: Выберем ось x, направленную от левой стенки к правой, с началом на левой стенке. Пусть два последовательных соударения происходят в точках с координатами x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$). После первого соударения та шайба, которая движется к левой стенке и отскакивает от нее, пройдет до второго соударения путь $x_1 + x_2$. Путь другой шайбы до соударения можно записать в виде $L - x_1 + L - x_2 = 2L - (x_1 + x_2)$. Поскольку скорости шайб одинаковы, пройденные ими между соударениями пути должны быть равны, т.е. $x_1 + x_2 = 2L - (x_1 + x_2)$. Отсюда находим, что $x_1 + x_2 = L$ и время между соударениями равно L/V. Отметим также, что $x_1 = L - x_2$, т.е. соударения происходят в точках, расположенных симметрично относительно точки $x = L/2$.

Шайбы будут двигаться в одном направлении после того, как двигающаяся влево шайба отскочит от левой стенки, а двигающаяся вправо шайба еще не столкнется с правой стенкой. Движение в одну сторону (в данном случае – к правой стенке) будет продолжаться в течение времени $(L - 2x_1)/V$. По условию это время равно $L/(2V)$. Приравнивая эти выражения, находим $x_1 = L/4$.

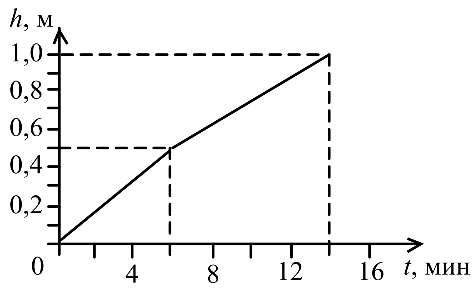
2. (30 баллов) Чтобы набрать корзинку грибов, семиклассник Вова может пойти либо в ближний лес, либо в тот, который расположен вдвое дальше, но где грибы попадаются вдвое чаще. Вова знает, что до дальнего леса идти столько же времени, сколько требуется для сбора полной корзинки в этом лесу, и что скорость движения с полной корзинкой вдвое меньше, чем с пустой. В какой лес следует идти Вове, чтобы вернуться домой с полной корзинкой как можно быстрее?

Ответ: Вове следует идти за грибами в ближний лес.

Решение: Примем время движения до ближнего леса за T. Тогда время движения до дальнего леса составит $2T$, таким же будет время сбора полной корзинки в дальнем лесу, а время движения из дальнего леса до дома составит $4T$. Таким образом, при сборе полной корзинки в дальнем лесу полные затраты времени составят $8T$. Время сбора грибов в ближнем лесу равно $4T$, а время движения из ближнего леса домой $2T$. Полные затраты времени на сбор полной корзинки в ближнем лесу составят $7T$, что выгоднее. Можно проверить, что другие варианты сбора грибов (со сбором части корзинки в одном лесу и добиранием корзинки в другом лесу) требуют затрат большего (чем $7T$) времени.

3. (30 баллов) В кубический аквариум с ребром, равным 1 м, на дне которого лежит камень в виде куба с ребром 0,5 м, равномерно наливают воду. Нарисовать график зависимости от времени высоты уровня воды над дном, если время заполнения аквариума водой составило 14 минут.

Ответ: См. рисунок.



Решение: Пока камень не окажется полностью погруженным в воду скорость подъема уровня воды будет в 4/3 раза больше, чем при дальнейшем заполнении аквариума (площадь основания камня составляет ¼ от площади дна аквариума). Следовательно, до высоты 0,5 м уровень воды поднимется за 14:(3/7) = 6 минут, а края аквариума уровень воды достигнет еще через 8 минут.

8 класс

1. (40 баллов) Две одинаковые шайбы скользят без трения по горизонтальной поверхности между стенками, находящимися на расстоянии L друг от друга, в перпендикулярном к стенкам направлении. При соударениях шайб со стенками и между собой их скорости мгновенно изменяют направление на противоположное, оставаясь постоянными по величине. Найти время между двумя последовательными соударениями шайб, если их скорости равны V (20 баллов). На каком расстоянии от стенок происходят соударения шайб, если половину времени между двумя последовательными соударениями шайбы движутся в одном направлении (20 баллов)?

Ответ: Время между двумя последовательными соударениями равно L/V. Соударения происходят на расстоянии $L/4$ то от одной, то от другой стенки.

Решение: Выберем ось x, направленную от левой стенки к правой, с началом на левой стенке. Пусть два последовательных соударения происходят в точках с координатами x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$). После первого соударения та шайба, которая движется к левой стенке и отскакивает от нее, пройдет до второго соударения путь $x_1 + x_2$. Путь другой шайбы до соударения можно записать в виде $L - x_1 + L - x_2 = 2L - (x_1 + x_2)$. Поскольку скорости шайб одинаковы, пройденные ими между соударениями пути должны быть равны, т.е. $x_1 + x_2 = 2L - (x_1 + x_2)$. Отсюда находим, что $x_1 + x_2 = L$ и время между соударениями равно L/V. Отметим также, что $x_1 = L - x_2$, т.е. соударения происходят в точках, расположенных симметрично относительно точки $x = L/2$.

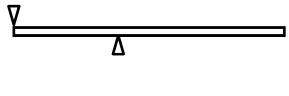
Шайбы будут двигаться в одном направлении после того, как двигающаяся влево шайба отскочит от левой стенки, а двигающаяся вправо шайба еще не столкнется с правой стенкой. Движение в одну сторону (в данном случае – к правой стенке) будет продолжаться в течение времени $(L - 2x_1)/V$. По условию это время равно $L/(2V)$. Приравнивая эти выражения, находим $x_1 = L/4$.

2. (30 баллов) В цилиндрический сосуд с водой поместили деревянный брусок объема V. При этом давление воды на дно не изменилось, и половина объема бруска оказалась выше края сосуда. Найти массу бруска. Плотность воды ρ считать известной.

Ответ: Масса бруска равна $\rho V/2$.

Решение: Поскольку давление воды на дно не изменилось, ясно, что часть воды из сосуда вылилась, уровень воды в сосуде с плавающим бруском находится вровень с краем сосуда и половина объема бруска погружена в воду. Из закона Архимеда и условия плавания бруска находим, что масса бруска равна $\rho V/2$.

3. (30 баллов) Однородная балка удерживается в горизонтальном положении двумя упорами (см. рис.). Если вместо упора, действующего на левый конец, подставить упор под правый конец балки, то на него будет действовать сила, в 2 раза



меньшая, чем действовала на левом конце. Во сколько раз изменится при этом сила на упор, который остался на месте?

Ответ: Сила уменьшится в 2 раза.

Решение: Рассматривая равенство нулю моментов действующих на балку сил (силы тяжести и силы со стороны упора на конец балки) относительно остающегося на месте упора в начальном и конечном положениях, находим, что этот упор находится на 1/3 длины балки от ее левого конца. Расстояние от этого упора до центра тяжести равно 1/6 длины балки. Используя это, находим, что сила на левый конец балки равнялась половине веса балки, а сила на правый конец – ¼ веса балки. Рассматривая баланс сил в двух случаях, находим, что сила на остающийся на месте упор уменьшилась вдвое.

9 класс

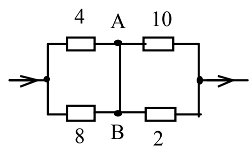
1. (40 баллов) Частица начинает движение вдоль оси x из точки с координатой x_0 ($x_0 > 0$), достигает максимальной координаты $2x_0$ и через время t после начала движения проходит точку $x = 0$. Найти ускорение частицы, считая его постоянным.

Ответ: Ускорение равно $2\left(3+2\sqrt{2}\right)\frac{x_0}{t^2}$.

Решение: Обозначим через t_1 время движения частицы от точки x_0 до точки $2x_0$, через t_2 время движения от точки $2x_0$ до точки $x = 0$ и через a – величину ускорения частицы. Составим систему уравнений:

$$2x_0 - x_0 = \frac{at_1^2}{2}, \quad 2x_0 = \frac{at_2^2}{2}, \; t_1 + t_2 = t.$$

В первой формуле учтено, что время движения от точки x_0 до точки $2x_0$ равно времени обратного движения между этими точками. Решая систему уравнений, находим ускорение a.



2. (30 баллов) Значения сопротивлений, из которых собран участок цепи, приведены в омах, сопротивление перемычки АВ пренебрежимо мало. Найти ток через перемычку АВ, если во внешней цепи протекает ток 6 А.

Ответ: Ток через перемычку равен 3 А.

Решение: Подтекающий слева из внешней цепи ток 6 А делится между включенными параллельно резисторами с номиналами 4 Ом и 8 Ом в пропорции 2:1. Отсюда находим, что ток через резистор 4 Ом равен 4 А, а через резистор 8 Ом равен 2 А. Аналогично находим, что ток через резистор 10 Ом равен 1 А, а через резистор 2 Ом равен 5 А. Рассматривая баланс токов, например, для узла А, находим, что ток через перемычку равен 3 А и течет от А к В.

3. (30 баллов) В цилиндрический сосуд с водой поместили деревянный брусок объема V. При этом давление воды на дно не изменилось, и половина объема бруска оказалась выше края сосуда. Найти массу бруска. Плотность воды ρ считать известной.

Ответ: Масса бруска равна $\rho V/2$.

Решение: Поскольку давление воды на дно не изменилось, ясно, что часть воды из сосуда вылилась, уровень воды в сосуде с плавающим бруском находится вровень с краем сосуда и половина объема бруска погружена в воду. Из закона Архимеда и условия плавания находим, что масса бруска равна $\rho V/2$.

10 класс

1. (30 баллов) Частица начинает движение вдоль оси x из точки с координатой x_0 ($x_0 > 0$), достигает максимальной координаты $2x_0$ и проходит точку $x = 0$ через время t после начала движения. Найти ускорение частицы, считая его постоянным.

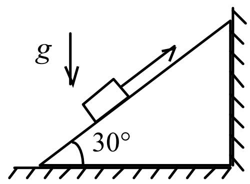
Ответ: Ускорение равно $2\left(3+2\sqrt{2}\right)\dfrac{x_0}{t^2}$.

Решение: Обозначим через t_1 время движения частицы от точки x_0 до точки $2x_0$, через t_2 время движения от точки $2x_0$ до точки $x = 0$ и через a – величину ускорения частицы. Составим систему уравнений:

$$2x_0 - x_0 = \frac{at_1^2}{2}, \quad 2x_0 = \frac{at_2^2}{2}, \; t_1 + t_2 = t.$$

В первой формуле учтено, что время движения от точки x_0 до точки $2x_0$ равно времени обратного движения между этими точками. Решая систему уравнений, находим ускорение a.

2. (30 баллов) Клин массы m с углом 30° при основании стоит на гладком столе, касаясь вертикальной стены (см. рис.). По наклонной грани клина втаскивают с ускорением $g/2$ (g – ускорение свободного падения) груз той же массы, действуя на него силой, равной по величине mg и направленной вдоль наклонной грани клина. Найти силы, с которыми клин давит на стенку (15 баллов) и на пол (15 баллов).



Ответ: Клин давит на стенку с силой $\dfrac{\sqrt{3}}{4}mg$, а на пол – с силой $\dfrac{7}{4}mg$.

Решение: Из второго закона Ньютона для груза в проекции на наклонную грань клина следует, что сила трения между грузом и клином равна нулю. Из второго закона Ньютона для груза в проекции на нормальное к наклонной грани направление следует, что груз давит на клин с силой $\dfrac{\sqrt{3}}{2}mg$. Горизонтальная компонента этой силы дает силу давления на стенку. Вертикальная компонента этой силы вместе с силой тяжести, действующей на клин, определяет силу давления на пол.

Возможно решение другим способом – путем рассмотрения изменения импульса системы тел, состоящей из клина и груза.

3. (40 баллов) Шарик, подвешенный на нити, отклонили от вертикали так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, и отпустили. Какого максимального значения достигает горизонтальная проекция ускорения шарика в процессе движения? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ: Максимальное значение горизонтальной проекции ускорения равно $3g/2$.

Решение: Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на направление нити в виде

$$\frac{mV^2}{L} = T - mg\cos\alpha,$$

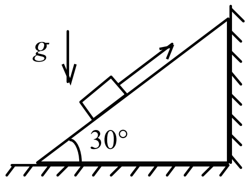
где m и V –масса и скорость шарика, L – длина нити, T – сила натяжения нити, α - угол между нитью и вертикалью. Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mV^2}{2} = mgL\cos\alpha.$$

Из записанных уравнений находим, что $T = 3mg\cos\alpha$. Горизонтальное ускорение шарика определяется горизонтальной проекцией силы T и равно $3g\cos\alpha\sin\alpha$. Максимальное значение полученного выражения равно $3g/2$ и достигается при $\alpha = \pi/4$.

11 класс

1. (30 баллов) Клин массы m с углом 30° при основании стоит на гладком столе, касаясь вертикальной стены (см. рис.). По наклонной грани клина втаскивают с ускорением $g/2$ (g – ускорение свободного падения) груз той же массы, действуя на него силой, равной по величине mg и направленной вдоль наклонной грани клина. Найти силы, с которыми клин давит на стенку (15 баллов) и на пол (15 баллов).

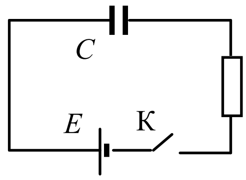


Ответ: Клин давит на стенку с силой $\frac{\sqrt{3}}{4}mg$, а на пол – с силой $\frac{7}{4}mg$.

Решение: Из второго закона Ньютона для груза в проекции на наклонную грань клина следует, что сила трения между грузом и клином равна нулю. Из второго закона Ньютона для груза в проекции на нормальное к наклонной грани направление следует, что груз давит на клин с силой $\frac{\sqrt{3}}{2}mg$. Горизонтальная компонента этой силы дает силу давления на стенку. Вертикальная компонента этой силы вместе с силой тяжести, действующей на клин, определяет силу давления на пол.

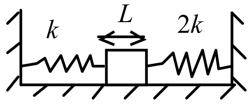
Возможно решение другим способом – путем рассмотрения изменения импульса системы тел, состоящей из клина и груза.

2. (40 баллов) В схеме, приведенной на рисунке, батарею с ЭДС E подключают через резистор к заряженному конденсатору емкости C. Найти начальный заряд конденсатора, если работа батареи оказалась в 1,5 раза больше первоначальной энергии конденсатора.



Ответ: Начальный заряд конденсатора может иметь два значения: $\frac{2}{3}CE$ и $2CE$.

Решение: Обозначим первоначальный заряд пластины, подключаемой к положительному полюсу батареи, через q_0. Поскольку конечный заряд этой пластины равен CE, для работы батареи получаем выражение $E(CE - q_0)$. По условию задачи $E\left(CE - q_0\right) = 1{,}5\frac{q_0^2}{2C}$. Решая квадратное уравнение, находим два корня: $q_0 = 2CE/3$ и $q_0 = -2CE$. Отрицательное значение q_0 соответствует случаю, когда к отрицательно заряженной пластине конденсатора подключают положительный полюс батареи.



3. (30 баллов) Две пружины с жесткостями k и $2k$, имеющие в недеформированном состоянии одинаковую длину, прикреплены концами к двум стенкам, расстояние между которыми равно удвоенной длине одной пружины. Брусок массы m и длины L поставили на гладкий пол посередине между стенками, скрепили с ним свободные концы пружин (см. рис.) и отпустили без начальной скорости. Найти период гармонических колебаний бруска (10 баллов) и максимальную скорость бруска (20 баллов).

Ответ: Период колебаний равен $2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$. Максимальная скорость бруска равна $\frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{3m}}$.

Решение: Колебания бруска под действием двух пружин эквивалентны колебаниям под действием одной пружины жесткости $3k$. Отсюда следует выражение для периода. Скорость бруска будет максимальной при прохождении положения равновесия, т.е. в положении, где результирующая сила со стороны двух пружин обращается в нуль. Это положение смещено от начального на $L/6$ в сторону пружины меньшей жесткости. Учитывая, что в начальном положении каждая пружина сжата на $L/2$, запишем закон сохранения энергии в виде $\frac{mV^2}{2}+\frac{k}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{6}\right)^2+\frac{2k}{2}\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{6}\right)^2=\frac{k}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2+\frac{2k}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2$. Отсюда находим максимальную скорость V.

Максимальную скорость можно найти также как произведение амплитуды колебаний $L/6$ на круговую частоту колебаний $\sqrt{\frac{3k}{m}}$.

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2016-2017
Физика, I тур, вариант 2
РЕШЕНИЯ

7 класс

1. (40 баллов) Две одинаковые шайбы скользят без трения по горизонтальной поверхности между стенками, находящимися на расстоянии L друг от друга, в перпендикулярном к стенкам направлении. При соударениях шайб со стенками и между собой их скорости мгновенно изменяют направление на противоположное, оставаясь постоянными по величине. Найти время между двумя последовательными соударениями шайб, если их скорости равны V (20 баллов). На каком расстоянии от стенок происходят соударения шайб, если треть времени между двумя последовательными соударениями шайбы движутся в одном направлении (20 баллов)?

Ответ: Время между двумя последовательными соударениями равно L/V. Соударения происходят на расстоянии $L/3$ то от одной, то от другой стенки.

Решение: Выберем ось x, направленную от левой стенки к правой, с началом на левой стенке. Пусть два последовательных соударения происходят в точках с координатами x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$). После первого соударения та шайба, которая движется к левой стенке и отскакивает от нее, пройдет до второго соударения путь $x_1 + x_2$. Путь другой шайбы до соударения можно записать в виде $L - x_1 + L - x_2 = 2L – (x_1 + x_2)$. Поскольку скорости шайб одинаковы, пройденные ими между соударениями пути должны быть равны, т.е. $x_1 + x_2 = 2L – (x_1 + x_2)$. Отсюда находим, что $x_1 + x_2 = L$ и время между соударениями равно L/V. Отметим также, что $x_1 = L - x_2$, т.е. соударения происходят в точках, расположенных симметрично относительно точки $x = L/2$.

Шайбы будут двигаться в одном направлении после того, как двигающаяся влево шайба отскочит от левой стенки, а двигающаяся вправо шайба еще не столкнется с правой стенкой. Движение в одну сторону (в данном случае – к правой стенке) будет продолжаться в течение времени $(L - 2x_1)/V$. По условию это время равно $L/(3V)$. Приравнивая эти выражения, находим $x_1 = L/3$.

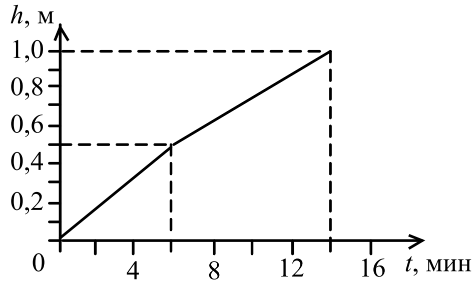
2. (30 баллов) Чтобы набрать корзинку грибов, семиклассник Вова может пойти либо в ближний лес, либо в тот, который расположен вдвое дальше, но где грибы попадаются вдвое чаще. Вова знает, что до дальнего леса идти столько же времени, сколько требуется для сбора полной корзинки в этом лесу, и что скорость движения с полной корзинкой вдвое меньше, чем с пустой. В какой лес следует идти Вове, чтобы вернуться домой с полной корзинкой как можно быстрее?

Ответ: Вове следует идти за грибами в ближний лес.

Решение: Примем время движения до ближнего леса за T. Тогда время движения до дальнего леса составит $2T$, таким же будет время сбора полной корзинки в дальнем лесу, а время движения из дальнего леса до дома составит $4T$. Таким образом, при сборе полной корзинки в дальнем лесу полные затраты времени составят $8T$. Время сбора грибов в ближнем лесу равно $4T$, а время движения из ближнего леса домой $2T$. Полные затраты времени на сбор полной корзинки в ближнем лесу составят $7T$, что выгоднее. Можно проверить, что другие варианты сбора грибов (со сбором части корзинки в одном лесу и добиранием корзинки в другом лесу) требуют затрат большего (чем $7T$) времени.

3. (30 баллов) В кубический аквариум с ребром, равным 1 м, на дне которого лежит камень в виде куба с ребром 0,5 м, равномерно наливают воду. Нарисовать график зависимости от времени высоты уровня воды над дном, если через 6 минут после начала заполнения аквариума вода полностью покрыла камень.

Ответ: См. рисунок.



Решение: Пока камень не окажется полностью погруженным в воду скорость подъема уровня воды будет в 4/3 раза больше, чем при дальнейшем заполнении аквариума (площадь основания камня составляет ¼ от площади дна аквариума). Следовательно, от высоты 0,5 м до края аквариума уровень воды поднимается за $6 \cdot 4/3 = 8$ минут, а полное время заполнения аквариума составляет 14 мин.

8 класс

1. (40 баллов) Две одинаковые шайбы скользят без трения по горизонтальной поверхности между стенками, находящимися на расстоянии L друг от друга, в перпендикулярном к стенкам направлении. При соударениях шайб со стенками и между собой их скорости мгновенно изменяют направление на противоположное, оставаясь постоянными по величине. Найти время между двумя последовательными соударениями шайб, если их скорости равны V (20 баллов). На каком расстоянии от стенок происходят соударения шайб, если треть времени между двумя последовательными соударениями шайбы движутся в одном направлении (20 баллов)?

Ответ: Время между двумя последовательными соударениями равно L/V. Соударения происходят на расстоянии $L/3$ то от одной, то от другой стенки.

Решение: Выберем ось x, направленную от левой стенки к правой, с началом на левой стенке. Пусть два последовательных соударения происходят в точках с координатами x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$). После первого соударения та шайба, которая движется к левой стенке и отскакивает от нее, пройдет до второго соударения путь $x_1 + x_2$. Путь другой шайбы до соударения можно записать в виде $L - x_1 + L - x_2 = 2L - (x_1 + x_2)$. Поскольку скорости шайб одинаковы, пройденные ими между соударениями пути должны быть равны, т.е. $x_1 + x_2 = 2L - (x_1 + x_2)$. Отсюда находим, что $x_1 + x_2 = L$ и время между соударениями равно L/V. Отметим также, что $x_1 = L - x_2$, т.е. соударения происходят в точках, расположенных симметрично относительно точки $x = L/2$.

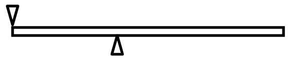
Шайбы будут двигаться в одном направлении после того, как двигающаяся влево шайба отскочит от левой стенки, а двигающаяся вправо шайба еще не столкнется с правой стенкой. Движение в одну сторону (в данном случае – к правой стенке) будет продолжаться в течение времени $(L - 2x_1)/V$. По условию это время равно $L/(3V)$. Приравнивая эти выражения, находим $x_1 = L/3$.

2. (30 баллов) В цилиндрический сосуд с водой поместили деревянный брусок массы m. При этом сила давления воды на дно увеличилась на половину веса бруска, и половина объема бруска оказалась выше края сосуда. Какой максимальный объем воды можно было долить в сосуд без перелива через край до помещения в него бруска? Плотность воды ρ считать известной.

Ответ: Максимальный объем воды, который можно было долить, равен $m/(2\rho)$.

Решение: Поскольку сила давления воды на дно увеличилась на величину, меньшую веса бруска, ясно, что часть воды из сосуда вылилась и уровень воды в сосуде с плавающим бруском находится вровень с краем сосуда. Изменение силы давления воды на дно ΔF можно записать как произведение изменения давления у дна на площадь дна, т.е. в виде $\Delta F = \rho g \Delta h S$, где g – ускорение свободного падения, Δh – повышение уровня воды (от первоначального до края сосуда), S – площадь дна сосуда. Приравнивая ΔF к $mg/2$, находим, что $\Delta h S = m/(2\rho)$. Очевидно, $\Delta h S$ и есть искомый объем.

3. (30 баллов) Однородная балка удерживается в горизонтальном положении двумя упорами (см. рис.). Если вместо упора, действующего на левый конец, подставить упор под правый конец балки, то на него будет действовать сила, в 2 раза меньшая, чем действовала на левом конце, а сила на оставшийся на месте упор уменьшится на 6000 Н. Чему равен вес балки?



Ответ: Вес балки равен 8000 Н.

Решение: Рассматривая равенство нулю моментов действующих на балку сил (силы тяжести и силы со стороны упора на конец балки) относительно остающегося на месте упора в начальном и конечном положениях, находим, что этот упор находится на 1/3 длины балки от ее левого конца. Расстояние от этого упора до центра тяжести равно 1/6 длины балки. Используя это, находим, что сила на левый конец балки равнялась половине веса балки, а сила на правый конец – ¼ веса балки. Рассматривая баланс сил в двух случаях, находим вес балки.

9 класс

1. (40 баллов) Частица начинает движение вдоль оси x из точки с координатой x_0 ($x_0 > 0$), достигает максимальной координаты $2x_0$ и через время t после начала движения проходит точку $x = 0$. Найти начальную скорость частицы, считая ускорение частицы постоянным.

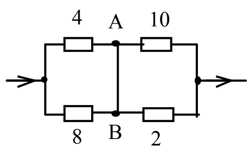
Ответ: Начальная скорость частицы равна $2\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{x_0}{t}$.

Решение: Обозначим через t_1 время движения частицы от точки x_0 до точки $2x_0$, через t_2 время движения от точки $2x_0$ до точки $x = 0$ и через a – величину ускорения частицы. Составим систему уравнений:

$$2x_0 - x_0 = \frac{at_1^2}{2}, \quad 2x_0 = \frac{at_2^2}{2}, \quad t_1 + t_2 = t.$$

В первой формуле учтено, что время движения от точки x_0 до точки $2x_0$ равно времени обратного движения между этими точками. Решая систему уравнений, находим время $t_1 = \frac{t}{1+\sqrt{2}}$. Поскольку средняя скорость частицы при движении от x_0 до $2x_0$ равна $V/2$ (V – начальная скорость), то $x_0 = Vt_1/2$. В итоге находим $V = 2\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{x_0}{t}$.

2. (30 баллов) Значения сопротивлений, из которых собран участок цепи, приведены в омах, сопротивление перемычки АВ пренебрежимо мало. Во сколько раз ток во внешней цепи превышает ток через перемычку АВ.



Ответ: Ток во внешней цепи превышает ток через перемычку в 2 раза.

Решение: Обозначим ток во внешней цепи через I. Этот ток делится между включенными параллельно резисторами с номиналами 4 Ом и 8 Ом в пропорции 2:1. Отсюда находим, что ток через резистор 4 Ом равен $2I/3$, а через резистор 8 Ом равен $I/3$. Аналогично находим, что ток через резистор 10 Ом равен $I/6$, а через резистор 2 Ом равен $5I/6$. Рассматривая баланс токов, например, для узла А, находим, что ток через перемычку равен $I/2$, т.е. в два раза меньше тока во внешней цепи, и течет от А к В.

3. (30 баллов) В цилиндрический сосуд с водой поместили деревянный брусок массы m. При этом сила давления воды на дно увеличилась на половину веса бруска, и половина объема бруска оказалась выше края сосуда. Какой максимальный объем воды можно было долить в сосуд без перелива через край до помещения в него бруска? Плотность воды ρ считать известной.

Ответ: Максимальный объем воды, который можно было долить, равен $m/(2\rho)$.

Решение: Поскольку сила давления воды на дно увеличилась на величину, меньшую веса бруска, ясно, что часть воды из сосуда вылилась и уровень воды в сосуде с плавающим бруском находится вровень с краем сосуда. Изменение силы давления воды на дно ΔF можно записать как произведение изменения давления у дна на площадь дна, т.е. в виде $\Delta F = \rho g \Delta h S$, где g – ускорение свободного падения, Δh – повышение уровня воды (от первоначального до края сосуда), S – площадь дна сосуда. Приравнивая ΔF к $mg/2$, находим, что $\Delta h S = m/(2\rho)$. Очевидно, $\Delta h S$ и есть искомый объем.

10 класс

1. (30 баллов) Частица начинает движение вдоль оси x из точки с координатой x_0 ($x_0 > 0$), достигает максимальной координаты $2x_0$ и проходит точку $x = 0$ через время t после начала движения. Найти начальную скорость частицы, считая ускорение частицы постоянным.

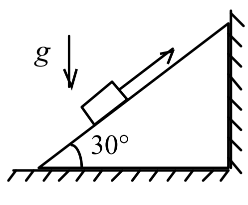
Ответ: Начальная скорость частицы равна $2\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{x_0}{t}$.

Решение: Обозначим через t_1 время движения частицы от точки x_0 до точки $2x_0$, через t_2 время движения от точки $2x_0$ до точки $x = 0$ и через a – величину ускорения частицы. Составим систему уравнений:

$$2x_0 - x_0 = \frac{at_1^2}{2}, \quad 2x_0 = \frac{at_2^2}{2}, \; t_1 + t_2 = t.$$

В первой формуле учтено, что время движения от точки x_0 до точки $2x_0$ равно времени обратного движения между этими точками. Решая систему уравнений, находим время $t_1 = \frac{t}{1+\sqrt{2}}$. Поскольку средняя скорость частицы при движении от x_0 до $2x_0$ равна $V/2$ (V – начальная скорость), то $x_0 = Vt_1/2$. В итоге находим $V = 2\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{x_0}{t}$.

2. (30 баллов) Клин массы m с углом 30° при основании стоит на гладком столе, касаясь вертикальной стены (см. рис.). По наклонной грани клина втаскивают с ускорением $g/3$ (g – ускорение свободного падения) груз той же массы, действуя на него силой, равной по величине mg и направленной вдоль наклонной грани клина. Найти силу трения между грузом и клином (10 баллов) и силу, с которой клин давит на стенку (20 баллов).



Ответ: Сила трения равна $\frac{1}{6}mg$. Клин давит на стенку с силой $\frac{\sqrt{3}}{3}mg$.

Решение: Из второго закона Ньютона для груза в проекции на наклонную грань клина следует, что сила трения между грузом и клином равна $mg/6$. Из второго закона Ньютона для груза в проекции на нормальное к наклонной грани направление следует, что груз давит на клин с силой $\frac{\sqrt{3}}{2}mg$. Сила давления клина на стенку равна сумме горизонтальных компонент силы давления груза на клин и силы трения со стороны груза на клин.

Возможно решение другим способом – путем рассмотрения изменения импульса системы тел, состоящей из клина и груза.

3. (40 баллов) Шарик массы *m*, подвешенный на нити, отклонили от вертикали так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, и отпустили. Какого максимального значения достигает горизонтальная проекция силы натяжения нити? Ускорение свободного падения равно *g*.

Ответ: Максимальное значение горизонтальной проекции силы натяжения равно $3mg/2$.

Решение: Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на направление нити в виде

$$\frac{mV^2}{L} = T - mg\cos\alpha,$$

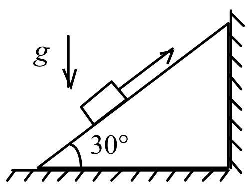
где V –скорость шарика, L – длина нити, T – сила натяжения нити, α - угол между нитью и вертикалью. Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mV^2}{2} = mgL\cos\alpha.$$

Из записанных уравнений находим, что $T = 3mg\cos\alpha$. Горизонтальная составляющая силы T равна $3mg\cos\alpha\sin\alpha$. Максимальное значение полученного выражения равно $3mg/2$ и достигается при $\alpha = \pi/4$.

11 класс

1. (30 баллов) Клин массы *m* с углом 30° при основании стоит на гладком столе, касаясь вертикальной стены (см. рис.). По наклонной грани клина втаскивают с ускорением $g/3$ (g – ускорение свободного падения) груз той же массы, действуя на него силой, равной по величине mg и направленной вдоль наклонной грани клина. Найти силу трения между грузом и клином (10 баллов) и силу, с которой клин давит на стенку (20 баллов).

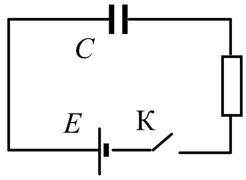


Ответ: Сила трения равна $\frac{1}{6}mg$. Клин давит на стенку с силой $\frac{\sqrt{3}}{3}mg$.

Решение: Из второго закона Ньютона для груза в проекции на наклонную грань клина следует, что сила трения между грузом и клином равна $mg/6$. Из второго закона Ньютона для груза в проекции на нормальное к наклонной грани направление следует, что груз давит на клин с силой $\frac{\sqrt{3}}{2}mg$. Сила давления клина на стенку равна сумме горизонтальных компонент силы давления груза на клин и силы трения со стороны груза на клин.

Возможно решение другим способом – путем рассмотрения изменения импульса системы тел, состоящей из клина и груза.

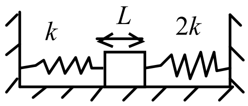
2. (40 баллов) В схеме, приведенной на рисунке, батарею с ЭДС E подключают через резистор к заряженному конденсатору емкости C. Найти выделившееся в резисторе количество теплоты, если работа батареи оказалась в 1,5 раза больше первоначальной энергии конденсатора.



Ответ: Количество теплоты может иметь два значения: $\frac{CE^2}{18}$ и $\frac{9CE^2}{2}$.

Решение: Обозначим первоначальный заряд пластины, подключаемой к положительному полюсу батареи, через q_0. Поскольку конечный заряд этой пластины равен CE, для работы батареи получаем выражение $E(CE - q_0)$. По условию задачи $E\left(CE - q_0\right) = 1{,}5\frac{q_0^2}{2C}$. Решая квадратное уравнение, находим два корня: $q_0 = 2CE/3$ и $q_0 = -2CE$. Отрицательное значение q_0 соответствует случаю, когда к отрицательно заряженной пластине конденсатора подключают положительный полюс батареи. Выделившееся тепло Q равно разности работы батареи и изменения энергии конденсатора: $Q = E\left(CE - q_0\right) - \left(\frac{CE^2}{2} - \frac{q_0^2}{2C}\right)$.

3. (30 баллов) Две пружины с жесткостями k и $2k$, имеющие в недеформированном состоянии одинаковую длину, прикреплены концами к двум стенкам, расстояние между которыми равно удвоенной длине одной пружины. Брусок массы m и длины L поставили на гладкий пол посередине между стенками, скрепили с ним свободные концы пружин (см. рис.) и отпустили без начальной скорости. Найти период гармонических колебаний бруска (10 баллов) и минимальную суммарную энергию пружин (20 баллов).



Ответ: Период колебаний равен $2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$. Минимальная энергия пружин равна $\frac{kL^2}{3}$.

Решение: Колебания бруска под действием двух пружин эквивалентны колебаниям под действием одной пружины жесткости $3k$. Отсюда следует выражение для периода. Суммарная энергия пружин будет минимальной при прохождении положения равновесия, т.е. в положении, где результирующая сила со стороны двух пружин обращается в нуль. Это положение смещено от начального на $L/6$ в сторону пружины меньшей жесткости. Учитывая, что в начальном положении каждая пружина сжата на $L/2$, находим минимальную энергию пружин как $\frac{k}{2}\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{6}\right)^2 + \frac{2k}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{6}\right)^2$.