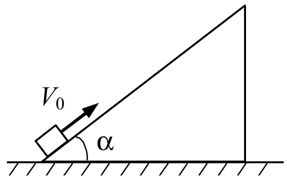
**ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2016-2017**
**Физика, II тур**
**РЕШЕНИЯ**

**11 класс**

**1**. (30 баллов) Кубику сообщили скорость $V_0$ вверх вдоль наклонной грани клина с углом $\alpha$ при основании (см. рис.). Масса кубика в два раза меньше массы клина, трение между кубиком и клином, клином и горизонтальной поверхностью стола отсутствует. Чему будет равна скорость кубика в момент, когда он вернется в исходную точку на поверхности клина?




**Ответ**: Скорость кубика равна $\frac{V_0}{3}\sqrt{1+8\sin^2\alpha}$.

**Решение:** Выберем неподвижные оси $x$ и $y$, направленные соответственно вправо и вверх. Из сохранения проекции импульса на ось $x$ получаем

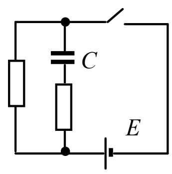
$$V_0\cos\alpha = V_x + 2U,$$

где $V_x$ – проекция скорости кубика на ось $x$ в момент его возврата в исходную точку на поверхности клина и $U$ – скорость клина в этот же момент. Из закона сохранения энергии имеем соотношение

$$V_0^2 = V_x^2 + V_y^2 + 2U^2,$$

где $V_y$ – проекция скорости кубика на ось $y$ в момент возврата. Кубик движется под действием постоянных сил и, следовательно, с постоянным ускорением. Из постоянства проекции ускорения на ось $y$ и равенства нулю перемещения кубика вдоль этой оси следует, что $V_y = -V_0\sin\alpha$. Составленные уравнения приводят к квадратному уравнению для $V_x$, которое имеет корни $V_0\cos\alpha$ (который следует отбросить) и $-\frac{1}{3}V_0\cos\alpha$. По теореме Пифагора находим величину скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

**2**. (30 баллов) В схеме, приведенной на рисунке, батарею с ЭДС $E$ подключили, замкнув ключ, к конденсатору емкости $C$ и двум резисторам, сопротивления которых отличаются в два раза. Через некоторое время, когда токи через резисторы стали одинаковыми, ключ разомкнули. Сколько тепла выделилось в резисторе с меньшим сопротивлением при замкнутом ключе (15 баллов) и после размыкания ключа (15 баллов)?



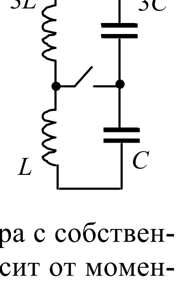

**Ответ:** При замкнутом ключе выделилось тепло $3CE^2/8$, а после размыкания $CE^2/24$.

**Решение:** Можно понять, что резистор с меньшим сопротивлением включен последовательно с конденсатором. В момент, когда токи в резисторах станут равными, напряжение на конденсаторе будет $E/2$, а заряд конденсатора будет $CE/2$. Записывая баланс энергии для батареи и ветви с конденсатором, получим

$$\frac{C\left(E/2\right)^2}{2} + Q_1 = \frac{CE^2}{2},$$

где первое слагаемое в левой части – запасенная в конденсаторе энергия, второе – тепло, выделившееся в резисторе с меньшим сопротивлением при замкнутом ключе, а правая часть представляет собой работу батареи над ветвью с конденсатором. Отсюда находим $Q_1 = 3CE^2/8$. После размыкания ключа 1/3 запасенной в конденсаторе энергии выделится в резисторе с меньшим сопротивлением и 2/3 – в другом резисторе. Таким образом, тепло $Q_2$, выделившееся в резисторе с меньшим сопротивлением после размыкания ключа, равно $Q_2 = CE^2/24$.

**3**. (30 баллов) В колебательном контуре, состоящем из двух независимых катушек с индуктивностями $L$ и $3L$ и двух конденсаторов с емкостями $C$ и $3C$ (см. рис.), происходят колебания с амплитудой тока $I_0$. Каково будет наибольшее значение максимального тока в перемычке после ее замыкания ключом?




**Ответ:** Наибольшее значение максимального тока равно $\frac{4}{\sqrt{3}}I_0$.

**Решение:** После замыкания ключа схема превращается в два независимых колебательных контура с собственными частотами, отличающимися в три раза. Амплитуда колебаний тока в каждом контуре зависит от момента, в который замкнули ключ. Например, при замыкании ключа в момент максимального тока $I_0$ в катушках (в этот момент конденсаторы разряжены) амплитуды токов в контурах будут тоже равны $I_0$. Поскольку при этом токи в перемычке, создаваемые двумя контурами, никогда не будут течь в одном направлении, максимальный ток через перемычку будет меньше $2I_0$. Наибольшее значение максимального тока в перемычке будет достигаться в том случае, когда перемычка замыкается в момент отсутствия токов в катушках (максимального заряда конденсаторов). Действительно, в этом случае нижнему контуру «достается» наибольшая часть (3/4) первоначальной энергии $2LI_0^2$, что обеспечивает наибольшую амплитуду тока ($\sqrt{3}I_0$) в этом контуре. Хотя при этом амплитуда тока в верхнем контуре имеет наименьшее значение ($I_0/\sqrt{3}$), сумма амплитуд токов в перемычке имеет наибольшее значение $\frac{4}{\sqrt{3}}I_0$. Это значение достигается через четверть периода колебаний в одном контуре и три четверти периода колебаний в другом.

**4.** (10 баллов) При рассмотрении дифракции света на круглом отверстии, сделанном в непрозрачном экране, можно, следуя Френелю, считать отверстие заполненным вторичными источниками волн. Для расчета интенсивности света за экраном в произвольной точке на прямой, проходящей через центр отверстия перпендикулярно экрану, удобно разбить площадь отверстия на концентрические кольцевые зоны (зоны Френеля). Радиусы границ каждой зоны таковы, что колебания от границ зоны приходят в выбранную точку со сдвигом фаз, равным $\pi$. Объясните существование на прямой точек, в которых интенсивность света равна нулю.

**Ответ:** Колебания от соседних зон Френеля приходят в точку наблюдения в противофазе и в результате интерференции гасят друг друга. В точках, для которых в отверстие укладывается четное число зон Френеля, интенсивность света получается равной нулю.

## 10 класс

**1**. (30 баллов) Под каким углом к горизонту было брошено тело, если бросок произошел в момент $t = 0$ и в моменты $t_1$ и $t_2$ скорость тела равнялась половине начальной?

**Ответ:** Тело было брошено под углом $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{t_1+t_2}{\sqrt{t_1t_2}}$.

**Решение:** Обозначим искомый угол через $\alpha$, начальную скорость тела через $V_0$ и ускорение свободного падения через $g$. Тогда скорость тела в произвольный момент времени $t$ можно записать в виде

$$V = \sqrt{V_0^2\cos^2\alpha + \left(V_0\sin\alpha - gt\right)^2}\ .$$

Из условия, что в моменты $t_1$ и $t_2$ скорость равна половине начальной, следуют два уравнения

$$g^2t_1^2 - 2V_0\sin\alpha g t_1 + \frac{3V_0^2}{4} = 0, \qquad g^2t_2^2 - 2V_0\sin\alpha g t_2 + \frac{3V_0^2}{4} = 0.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получаем соотношение

$$V_0 = \frac{g\left(t_1+t_2\right)}{2\sin\alpha}$$

и, подставляя его в любое из двух уравнений, находим $\sin\alpha$.

**2.** (30 баллов) Кубику сообщили скорость $V_0$ вверх вдоль наклонной грани клина с углом $\alpha$ при основании (см. рис.). Масса кубика в два раза меньше массы клина, трение между кубиком и клином, клином и горизонтальной поверхностью стола отсутствует. Какую скорость будет иметь клин в момент, когда кубик вернется в исходную точку на поверхности клина?

**Ответ**: Скорость клина будет равна $\frac{2}{3}V_0\cos\alpha$.

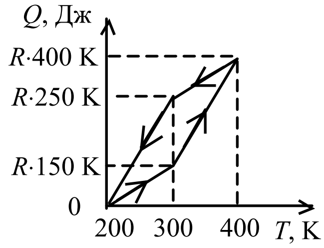
**Решение:** Выберем неподвижные оси $x$ и $y$, направленные соответственно вправо и вверх. Из сохранения проекции импульса на ось $x$ получаем

$$V_0\cos\alpha = V_x + 2U,$$

где $V_x$ – проекция скорости кубика на ось $x$ в момент его возврата в исходную точку на поверхности клина и $U$ – скорость клина в этот же момент. Из закона сохранения энергии имеем соотношение

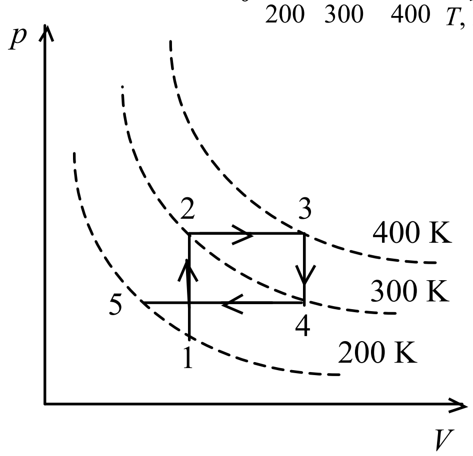
$$V_0^2 = V_x^2 + V_y^2 + 2U^2\ ,$$

где $V_y$ – проекция скорости кубика на ось $y$ в момент возврата. Кубик движется под действием постоянных сил и, следовательно, с постоянным ускорением. Из постоянства проекции ускорения на ось $y$ и равенства нулю перемещения кубика вдоль этой оси следует, что $V_y = -V_0\sin\alpha$. Составленные уравнения приводят к квадратному уравнению для $V_x$, которое имеет корни $V_0\cos\alpha$ (который следует отбросить) и $-\frac{1}{3}V_0\cos\alpha$. Подставляя найденное значение $V_x = -\frac{1}{3}V_0\cos\alpha$ в уравнение сохранения проекции импульса, получаем $U = \frac{2}{3}V_0\cos\alpha$.




**3**. (30 баллов) В ходе некоторого процесса, проводимого с одним молем одноатомного идеального газа, полученное газом тепло и его температура изменяются так, как показано на рисунке ($R$ – молярная газовая постоянная). Найти отношение максимального объема газа к минимальному.

**Ответ**: Отношение максимального объема газа к минимальному равно 3/2.




**Решение**: Из приведенного в условии задачи графика находим, что теплоемкость газа на участке нагревания от 200 К до 300 К равна $3R/2$, на участке нагревания от 300 К до 400 К равна $5R/2$, на следующем участке опять $3R/2$ и на последнем участке $5R/2$. Отсюда заключаем, что процесс представляет собой чередующиеся изохорные и изобарные участки. Изобразим процесс на плоскости $p,V$ (см. рис.). Объем газа максимален на участке 3-4 и минимален в конечной точке 5. Учитывая постоянство давления на участке 4-5, находим искомое отношение $V_4/V_5 = 3/2$.

**4.** (10 баллов) В термодинамике часто рассматривается процесс расширения газа в пустоту. В этом процессе газ, занимавший первоначально часть объема теплоизолированного сосуда и отделенный перегородкой от остальной части, где создан высокий вакуум, после устранения перегородки занимает весь объем. Установившаяся в сосуде температура газа оказывается ниже первоначальной. Объясните причину понижения температуры. Заметим, что в модели идеального газа понижение температуры объяснить невозможно.

**Ответ**: Температура понижается из-за того, что часть кинетической энергии теплового движения молекул газа идет на увеличение потенциальной энергии их притяжения.

**Решение**: Внутреннюю энергию газа $U$ можно представить как сумму кинетической энергии теплового движения молекул $U_к$ и потенциальной энергии их взаимного притяжения $U_п$: $U = U_к + U_п$. Поскольку над газом не совершают работу и не подводят к нему тепло, внутренняя энергия газа, согласно первому принципу термодинамики, не меняется при расширении, т.е. $U$ = const. В результате расширения газа среднее расстояние между молекулами возрастает, и, следовательно, возрастает потенциальная энергия $U_п$. Это происходит за счет уменьшения $U_к$.

## 9 класс

**1**. (40 баллов) Под каким углом к горизонту было брошено тело, если бросок произошел в момент $t = 0$ и в моменты $t_1$ и $t_2$ скорость тела равнялась половине начальной?

**Ответ:** Тело было брошено под углом $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{t_1+t_2}{\sqrt{t_1t_2}}$.

**Решение:** Обозначим искомый угол через α, начальную скорость тела – через $V_0$ и ускорение свободного падения через $g$. Тогда скорость тела в произвольный момент времени $t$ можно записать в виде

$$V = \sqrt{V_0^2\cos^2\alpha + \left(V_0\sin\alpha - gt\right)^2}.$$

Из условия, что в моменты $t_1$ и $t_2$ скорость равна половине начальной, следуют два уравнения

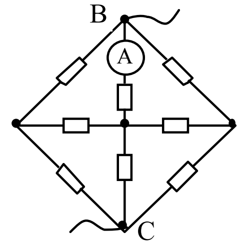
$$g^2t_1^2 - 2V_0\sin\alpha g t_1 + \frac{3V_0^2}{4} = 0, \qquad g^2t_2^2 - 2V_0\sin\alpha g t_2 + \frac{3V_0^2}{4} = 0.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получаем соотношение

$$V_0 = \frac{g\left(t_1+t_2\right)}{2\sin\alpha}$$

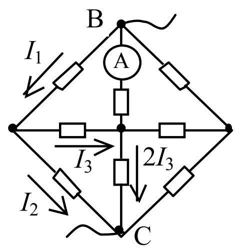
и, подставляя его в любое из двух уравнений, находим $\sin\alpha$.

**2**. (30 баллов) В схеме, приведенной на рисунке, все резисторы имеют одинаковое сопротивление 70 Ом и к точкам В и С подведено постоянное напряжение. Амперметр с пренебрежимо малым сопротивлением показывает ток 1 А. Какое напряжение покажет вольтметр с очень большим сопротивлением, если его включить вместо амперметра?




**Ответ:** Вольтметр покажет 100 В.

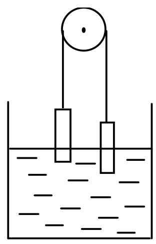
**Решение**: Вначале по показаниям амперметра найдем напряжение источника. При этом учтем, что в силу симметрии цепи токи не текут по двум горизонтальным участкам. Таким образом, ток в 1 А течет через два последовательно соединенных резистора общим сопротивлением 140 Ом. Отсюда находим, что напряжение источника равно 140 В. Рассмотрим теперь случай, когда амперметр заменен вольтметром. При этом ток через вольтметр и включенный последовательно с ним резистор практически равен нулю. Обозначим токи через остальные резисторы, как показано на рисунке. Составим следующие уравнения:




$$I_1 = I_2 + I_3, \quad (I_1 + I_2)\cdot 70 = 140, \quad I_2\cdot 70 = I_3\cdot 70 + 2I_3\cdot 70.$$

Решая систему уравнений, находим $I_1$ = 8/7 А и $I_3$ = 2/7 А. Учитывая, что напряжение на вольтметре равно сумме напряжений на резисторах, по которым протекают токи $I_1$ и $I_3$, находим показания вольтметра: 100 В.

**3**. (30 баллов) Два цилиндра одинаковой высоты 6 см и одинакового поперечного сечения висят на концах переброшенной через блок идеальной нити. При этом один из цилиндров погружен в воду на половину высоты, а другой – на треть (см. рис.). Плотности материалов цилиндров больше плотности воды. На сколько сместятся цилиндры относительно блока, если после доливания воды в сосуд ее уровень поднимется на 5 см?



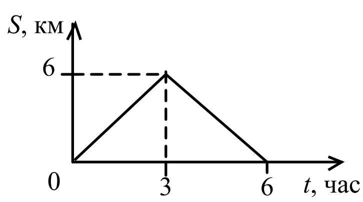
**Ответ:** Правый цилиндр сместится на 2 см вниз, а левый – на 2 см вверх.

**Решение**: Пока вода полностью не покроет правый цилиндр (подъем уровня воды не больше 3 см), цилиндры останутся в покое, поскольку сила Архимеда будет возрастать одинаково для обоих цилиндров. При дальнейшем повышении уровня воды сила Архимеда, действующая на правый цилиндр, меняться не будет, поэтому неизменной должна остаться и сила Архимеда, действующая на левый цилиндр. Это означает, что левый цилиндр будет следовать за уровнем воды и поднимется в итоге на 2 см. Правый цилиндр при этом опустится на 2 см.

Возможно также решение, в котором анализируется конечное (после доливания воды) равновесное положение цилиндров.

## 8 класс

**1**. (30 баллов) Два туриста одновременно выходят из одного пункта и через 6 часов приходят в другой, расположенный в 24 км. Туристы не могли двигаться быстрее 7 км/час и им разрешалось изменить свою скорость только один раз - через 3 часа после начала движения. Зависимость разности $S$ пройденных туристами путей от времени $t$ приведена на рисунке. Какие наименьшие значения скорости мог иметь идущий впереди турист в первые 3 часа (10 баллов) и вторые 3 часа (10 баллов) движения? Какой путь прошел за первые 3 часа идущий позади турист, если у идущего впереди скорость была наименьшей на второй половине времени движения (10 баллов)?

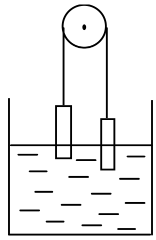



**Ответ:** Наименьшее значение скорости у идущего впереди туриста равно 3 км/час на первых 3 часах и 1 км/час – на вторых. Идущий позади турист прошел за первые 3 часа 15 км.

**Решение**: Согласно графику, на первых 3 часах движения скорость у идущего впереди туриста была на 2 км/час больше, чем у идущего позади, а на вторых 3 часах – на 2 км/час меньше. Скорость идущего позади туриста на первых 3 часах не может быть меньше 1 км/час (иначе он не пройдет 24 км за 6 часов), поэтому минимальная скорость идущего впереди туриста на первых 3 часах равна 3 км/час. На вторых 3 часах скорость идущего впереди туриста не может быть меньше 1 км/час, т.е. его минимальная скорость на этом интервале движения равна 1 км/час.

Если на вторых 3 часах скорость идущего впереди туриста была 1 км/час, то на первых 3 часах он шел со скоростью 7 км/час и, следовательно, идущий позади турист имел скорость 5 км/час. Таким образом, идущий позади турист прошел за первые 3 часа 15 км.

**2**. (40 баллов) Два цилиндра одинаковой высоты 6 см и одинакового поперечного сечения висят на концах переброшенной через блок идеальной нити. При этом один из цилиндров погружен в воду на половину высоты, а другой – на треть (см. рис.). Плотности материалов цилиндров больше плотности воды. На сколько сместятся цилиндры относительно блока, если после доливания воды в сосуд ее уровень поднимется на 5 см?



**Ответ:** Правый цилиндр сместится на 2 см вниз, а левый – на 2 см вверх.

**Решение**: Пока вода полностью не покроет правый цилиндр (подъем уровня воды не больше 3 см), цилиндры останутся в покое, поскольку сила Архимеда будет возрастать одинаково для обоих цилиндров. При дальнейшем повышении уровня воды сила Архимеда, действующая на правый цилиндр, меняться не будет, поэтому неизменной должна остаться и сила Архимеда, действующая на левый цилиндр. Это означает, что левый цилиндр будет следовать за уровнем воды и поднимется в итоге на 2 см. Правый цилиндр при этом опустится на 2 см.

Возможно также решение, в котором анализируется конечное (после доливания воды) равновесное положение цилиндров.

**3**. (30 баллов) Линейку длиной 32 см положили на брусок шириной 12 см несимметрично относительно середины бруска (см. рис.). Оказалось, что линейку можно наклонить (оторвать от плоскости бруска), приложив к ее концу одну и ту же направленную вверх или вниз вертикальную силу. На сколько сантиметров был сдвинут центр линейки относительно середины бруска?

**Ответ:** Центр линейки был сдвинут на 2 см.

**Решение**: Обозначим массу линейки через $m$, ее длину через $L$, ширину бруска через $D$, а искомый сдвиг (на рисунке – вправо) через $x$. Запишем условия отрыва линейки от бруска силой $F$, приложенной к правому концу линейки и направленной в одном случае вверх, а в другом – вниз:

$$F\cdot(L/2 + x + D/2) = mg\cdot(x + D/2), \qquad F\cdot(L/2 + x - D/2) = mg\cdot(D/2 - x).$$

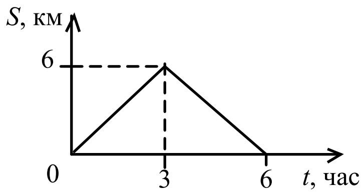
Здесь через $g$ обозначено ускорение свободного падения и учтено, что направленная вверх сила $F$ поворачивает линейку относительно левого края бруска, а направленная вниз – относительно правого края. Поделив одно уравнение на другое, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + 16x - 36 = 0.$$

Отбрасывая нефизичный корень $x$ = -18 см, находим, что $x$ = 2 см.

## 7 класс

**1**. (30 баллов) Два туриста одновременно выходят из одного пункта и через 6 часов приходят в другой, расположенный в 24 км. Туристы не могли двигаться быстрее 7 км/час и им разрешалось изменить свою скорость только один раз - через 3 часа после начала движения. Зависимость разности $S$ пройденных туристами путей от времени $t$ приведена на рисунке. Какие наименьшие значения скорости мог иметь идущий впереди турист в первые 3 часа (10 баллов) и вторые 3 часа (10 баллов) движения? Какой путь прошел за первые 3 часа идущий позади турист, если у идущего впереди скорость была наименьшей на второй половине времени движения (10 баллов)?




**Ответ:** Наименьшее значение скорости у идущего впереди туриста равно 3 км/час на первых 3 часах и 1 км/час – на вторых. Идущий позади турист прошел за первые 3 часа 15 км.

**Решение**: Согласно графику, на первых 3 часах движения скорость у идущего впереди туриста была на 2 км/час больше, чем у идущего позади, а на вторых 3 часах – на 2 км/час меньше. Скорость идущего позади туриста на первых 3 часах не может быть меньше 1 км/час (иначе он не пройдет 24 км за 6 часов), поэтому минимальная скорость идущего впереди туриста на первых 3 часах равна 3 км/час. На вторых 3 часах скорость идущего впереди туриста не может быть меньше 1 км/час, т.е. его минимальная скорость на этом интервале движения равна 1 км/час.

Если на вторых 3 часах скорость идущего впереди туриста была 1 км/час, то на первых 3 часах он шел со скоростью 7 км/час и, следовательно, идущий позади турист имел скорость 5 км/час. Таким образом, идущий позади турист прошел за первые 3 часа 15 км.

**2**. (30 баллов) Из двух сплавов с плотностями 5000 кг/м$^3$ и 10000 кг/м$^3$ сделали два шара радиусом 3 см каждый. У одного шара внутренняя часть радиусом 2 см сделана из легкого сплава, а внешняя часть (слой толщиной в 1 см) – из тяжелого. У другого шара внутренняя часть сделана из тяжелого сплава, а внешняя – из легкого. Во сколько раз отличаются массы шаров?

**Ответ:** Отношение массы шара с внутренней частью из легкого сплава к массе другого шара равно 46/35.

**Решение**: Учитывая, что объем шара пропорционален кубу его радиуса, запишем следующие выражения для масс шаров:

$$m_1 = k\rho_л r^3 + k\rho_т(R^3 - r^3),\ \ m_2 = k\rho_т r^3 + k\rho_л(R^3 - r^3),$$

где $\rho_л$ и $\rho_т$ – плотности легкого и тяжелого сплавов, $r$ = 2 см, $R$ = 3 см, $k$ – коэффициент пропорциональности между объемом шара и кубом его радиуса. Поделив одно выражение на другое и подставив данные, находим искомое отношение.

**3**. (40 баллов) Подвешенная к потолку за один конец пружина растягивается под действием собственного веса на 1 см. На сколько изменится растяжение пружины, если к ней подвесить груз, масса которого вдвое больше массы пружины?

**Ответ:** Растяжение увеличится на 4 см и станет равным 5 см.

**Решение**: В отсутствие груза увеличение расстояния между двумя верхними витками пружины пропорционально ее весу, а увеличение расстояния между нижними витками пренебрежимо мало. Общее удлинение пружины можно представить как произведение числа витков пружины на среднее увеличение расстояния между соседними витками, которое, очевидно, равно половине увеличения расстояния между верхними витками. При подвешенном грузе увеличение расстояния между верхними витками будет пропорционально утроенному весу пружины (т.е. в 3 раза больше, чем в отсутствие груза), а между нижними – пропорционально удвоенному весу пружины. Среднее увеличение расстояния между витками будет в 5 раз больше, чем в отсутствие груза. Следовательно, и удлинение пружины будет в 5 раз больше.