9 класс

№1(15). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{12}, \\ x^2y + xy^2 = 12. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что $x^2y + xy^2 = xy(x+y)$. Введем замену $xy = a, x + y = b$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{12}, \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b-a}{ab} = \dfrac{1}{12}, \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b-a}{12} = \dfrac{1}{12}, \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 1, \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + a, \\ a^2 + a - 12 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем, что $a = -4$ или $a = 3$.

1) Если $a = -4$, то $b = -3$. Тогда

$$\begin{cases} xy = -4, \\ x + y = -3. \end{cases}$$

Очевидно, что $(-4; 1)$ и $(1; -4)$ – решения данной системы.

2) Если $a = 3$, то $b = 4$. Тогда

$$\begin{cases} xy = 3, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Очевидно, что $(3; 1)$ и $(1; 3)$ – решения данной системы.

Ответ: $(3; 1)$,$(1; 3)$,$(-4; 1)$,$(1; -4)$.

№2(15). Решите уравнение $|x^2 - 3x| + |x + 1| = |x^2 - 4x - 1|$

Решение.

Пусть $x^2 - 3x = a$, $x + 1 = b$, тогда $x^2 - 4x - 1 = a - b$. Исходное уравнение принимает вид $|a| + |b| = |a - b|$, или $|a| + |-b| = |a + (-b)|$. Сумма модулей двух чисел равна модулю их суммы тогда и только тогда, когда числа одного знака (или одно из них равно нулю), откуда $a \cdot (-b) \geqslant 0$, т.е. $(x^2 - 3x)(-x - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+1) \leqslant 0$.

Получаем, что $x \leqslant -1$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ: $x \leqslant -1$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

№3(20). В треугольник ABC вписана окружность с центром O, к которой проведена касательная, пересекающая стороны AC и AB в точках M и N соответственно. Найдите $\angle A$ треугольника ABC, если $\angle MON = 32°$

Решение.

Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC, CA и прямой MN в точках C', A', B', K соответственно. Поскольку C', A', B', K – точки касания, то $\angle OC'N = \angle OKN = \angle OKM = \angle OB'M = 90°$. Прямоугольные треугольники OKM и $OB'M$ равны по катету и гипотенузе, следовательно, $\angle MOK = \angle MOB'$. Аналогично доказывается, что $\angle KON = \angle NOC'$. Заметим, что $\angle C'OB' = \angle C'ON + \angle NOK + \angle KOM + \angle MOB' = 2\angle NOK + 2\angle KOM = 2\angle MON = 64°$. В четырехугольнике $AC'OB'$ углы при вершинах B' и C' прямые, поэтому сумма двух других его углов равна $180°$. Значит, $\angle A + \angle B'OC' = 180°$, $\angle A = 116°$

Ответ: $\angle A = 116°$.

№4(25). Мастер изготавливает за 1 час целое число деталей (причем это число более 5), а ученик – на 2 детали меньше. Мастер в одиночку выполняет заказ за целое число часов, а два его ученика, работающие одинаково друг с другом – такой же заказ на один час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

Решение.

Пусть мастер изготавливает x деталей в час, а на выполнение всего заказа у него уходит a часов. Тогда один ученик делает $(x - 2)$ детали в час, а ученики вдвоем выполняют заказ за $(a - 1)$ часов.

Составим уравнение: $ax = 2(a-1)(x-2)$, откуда

$ax = 2ax - 2x - 4a + 4 \Leftrightarrow 4(a-1) = x(a-2) \Leftrightarrow x = \frac{4(a-1)}{a-2}$.

По условию $x > 5$, следовательно $\frac{4(a-1)}{a-2} > 5$, откуда получаем, что $2 < a < 6$.
Если $a = 3$, $x = 8$, тогда весь заказ равен $ax = 24$ детали.
Если $a = 4$, $x = 6$, тогда весь заказ равен $ax = 24$ детали.
Если $a = 5$, $x = \dfrac{16}{3}$. Но по условию x – целое, этот случай не подходит.

Ответ: *24 детали.*

№5(25). Найдите все значения a, при которых уравнения $4x^2 + 2ax + 1 = 0$ и $4x^2 + 2x + a = 0$ равносильны.

Решение.

Возможны 2 случая.

1) Оба уравнения не имеют решений. Это возможно при $\dfrac{D_1}{4} = a^2 - 4 < 0$ и $\dfrac{D_2}{4} = 1 - 4a < 0$, откуда $a \in (-2; 2)$ и $a \in \left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$, т.е. $a \in \left(\dfrac{1}{4}; 2\right)$

2) У уравнений есть общий корень x_0. Тогда выполняются равенства

$$\begin{cases} 4x_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0, \\ 4x_0^2 + 2x_0 + a = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнение второе, получаем $2ax_0 + 1 - 2x_0 - a = 0 \Leftrightarrow (2x_0 - 1)(a - 1) = 0$, т.е. $x_0 = \dfrac{1}{2}$ или $a = 1$.

Если $x_0 = \dfrac{1}{2}$, то находим, что $a = -2$.

Если $a = 1$, то оба уравнения не имеют решений. Значит, при $a = -2$ уравнения имеют общий корень. Проверим, являются ли они в этом случае равносильными. Подставляя $a = -2$, получаем

$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$4x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ или $x = \dfrac{1}{2}$

Таким образом, при $a = -2$ уравнения не равносильны. В итоге получаем $a \in \left(\dfrac{1}{4}; 2\right)$.

Ответ: $a \in \left(\dfrac{1}{4}; 2\right)$.

10 класс

№1(15). Решите неравенство
$$\frac{|x-4|+|2-x|}{x+2017}<1$$
.

Решение.

Рассмотрим несколько случаев.

1)Если $x \geqslant 4$, то $\dfrac{x-4+x-2}{x+2017}<1 \Leftrightarrow 2x-6<x+2017 \Leftrightarrow x<2023 \Rightarrow x\in[4;2023)$.

2)Если $2<x<4$, то $\dfrac{4-x+x-2}{x+2017}<1 \Leftrightarrow 6<x+2017 \Leftrightarrow x>-2011 \Rightarrow x\in(2;4)$.

3)Если $-2017<x\leqslant 2$, то $\dfrac{4-x+2-x}{x+2017}<1 \Leftrightarrow 6-2x<x+2017 \Leftrightarrow x>-\frac{2011}{3} \Rightarrow x\in \left(-\dfrac{2011}{3};2\right]$.

4)Если $x<-2017$, то $\dfrac{4-x+2-x}{x+2017}<1 \Leftrightarrow 6-2x>x+2017 \Leftrightarrow 3x<-2011 \Leftrightarrow x<-\dfrac{2011}{3}$ С учетом ограничения $x<-2017$.

Ответ: $x<-2017$, $-\dfrac{2011}{3}<x<2023$.

№2(20). Найдите все решения системы уравнений
$$\begin{cases}(x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3\\(x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3.\end{cases}$$

Решение.

Раскрываем скобки:
$$\begin{cases}x^3-x^2y-x^2y+xy^2+xy^2-y^3=1+y^3\\x^3+x^2y+x^2y+xy^2+xy^2+y^3=1-y^3.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $-4x^2y-2y^3=2y^3 \Rightarrow 4y(x^2+y^2)=0$.

Отсюда следует, что $x^2+y^2=0$ или $y=0$.

1) Если $x^2+y^2=0$, то $x=y=0$. Уравнения исходной системы при этом не выполняются, поэтому $x=y=0$ не является решением.

2) Если $y=0$, то первое уравнение принимает вид $x^3=1$, следовательно $x=1$.

Ответ: $(1;0)$.

№3(20). Найдите все значения r, при которых вершины двух парабол $y=x^2-2(r+1)x+1$ и $y=rx^2-x+r$ лежат по разные стороны от прямой $y=\dfrac{3}{4}$.

Решение.

Для первой параболы $y=x^2-2(r+1)x+1$ вершина имеет координаты $x_{B1}=r+1$, $y_{B1}=-r^2-2r$, а для второй параболы $y=rx^2-x+r$ – координаты $x_{B2}=\dfrac{1}{2r}, y_{B2}=-\dfrac{1}{4r}+r$. Возможны два случая.

1 случай.
$$\begin{cases}-r^2-2r<\dfrac{3}{4},\\-\dfrac{1}{4r}+r>\dfrac{3}{4}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4r^2+8r+3>0,\\\dfrac{4r^2-3r-1}{4r}>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4(r+1,5)(r+0,5)>0,\\\dfrac{4(r-1)(r+0,25)}{4r}>0.\end{cases}$$

Получаем, что $r\in(-0,25;0)\cup(1;+\infty)$.

2 случай.
$$\begin{cases}-r^2-2r>\dfrac{3}{4},\\-\frac{1}{4r}+r<\dfrac{3}{4}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4r^2+8r+3<0,\\\dfrac{4r^2-3r-1}{4r}<0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4(r+1,5)(r+0,5)<0,\\\dfrac{4(r-1)(r+0,25)}{4r}<0.\end{cases}$$

Получаем, что $r\in(-1,5;-0,5)$.

Ответ: $r \in (-1,5;-0,5) \cup (-0,25;0) \cup (1;+\infty)$.

№4(20). В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 28$, $AC = 56$, точка O - центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BP, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

Решение.

Продлим AO до пересечения с окружностью в точке C'. Тогда $\angle AC'B = \angle ACB$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AB. Поскольку AC' диаметр, то $\angle ABC' = 90°$. Треугольник ABC' – прямоугольный, а BP – его высота, проведенная из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABD = \angle BC'A$. Отсюда следует, что $\angle ABD = \angle ACB$.

Треугольники ACB и ABD подобны по 2 углам ($\angle ABD = \angle ACB$, $\angle BAC$ – общий).

$\dfrac{DA}{AB} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow DA = \dfrac{AB^2}{AC} = 14$. $CD = AC - AD = 42$.

Ответ: $CD = 42$.

№5(25). Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $abc+ab+ac+bc+a+b+c = 1000$?

Решение.

Заметим, что $(a+1)(b+1)(c+1) = abc+ab+ac+bc+a+b+c+1 = 1001$. Так как $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $(a+1) \geqslant 2, (b+1) \geqslant 2, (c+1) \geqslant 2$. Разложим число 1001 на простые множители: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Следовательно, одна из скобок равна 7, другая – 11, а третья – 13. Тогда данное уравнение имеет $3! = 6$ решений в натуральных числах.

Ответ: *6 решений.*

11 класс

№1(20). Изобразите на координатной плоскости (x, y) множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} |4y-3x+12| \leqslant 12, \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

Решение.

Неравенство $(|x|-4)^2+(|y|-3)^2 \leqslant 1$ задает 4 круга единичного радиуса с центрами в точках $(4;3)$, $(-4;-3)$, $(-4;3)$, $(4;-3)$.

Рассмотрим неравенство $|4y-3x+12| \leqslant 12$.

$|4y-3x+12| \leqslant 12 \Leftrightarrow -12 \leqslant 4y-3x+12 \leqslant 12 \Leftrightarrow -24+3x \leqslant 4y \leqslant 3x \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x-6 \leqslant y \leqslant \dfrac{3}{4}x.$

Таким образом, это неравенство задаёт полосу между двумя параллельными прямыми $y = \dfrac{3}{4}x-6$ и $y=\dfrac{3}{4}x$.

Множество решений системы представляет собой три полукруга. Их площадь $S = 3\cdot\dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: $S = \dfrac{3\pi}{2}$.

№2(20). Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = a$. Найдите $\dfrac{\cos 5x}{\cos x}$.

Решение.

$\dfrac{\cos 5x}{\cos x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{2\cos 4x \cos x}{\cos x} \Rightarrow \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = 2\cos 4x - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2\cos 4x - a$. Следовательно,

$a = \dfrac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x} \Rightarrow 4\cos^2 x - 3 = a \Leftrightarrow 2(\cos 2x+1)-3 = a \Leftrightarrow 2\cos 2x = a+1 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{a+1}{2}$. Тогда

$\cos 4x = 2\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{a^2+2x-1}{2}.$

Итак, $\dfrac{\cos 5x}{\cos x} = a^2+2a-1-a = a^2+a-1.$

Ответ: $\dfrac{\cos 5x}{\cos x} = a^2+a-1.$

№3(15). Винни Пух сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 55 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 1155 ступенек. Сколько бы ступенек он насчитал, спустившись вниз по неподвижному эскалатору?

Решение.

Пусть x – скорость Винни Пуха, y – скорость эскалатора, а длина эскалатора $S = 1$.

Когда Винни Пух бежал вниз, то он насчитал $\dfrac{1}{x+y} = 55$ ступенек.

Когда Винни Пух бежал вверх, то он насчитал $\dfrac{1}{x-y} = 1155$ ступенек.

Чтобы узнать, сколько ступенек он насчитает, спустившись по неподвижному эскалатору, необходимо найди значение выражения $\dfrac{1}{x}$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 55, \\ \dfrac{1}{x-y} = 1155 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{1}{55}, \\ x-y = \dfrac{1}{1155}. \end{cases}$$

Сложив первое уравнение со вторым, получаем $2x = \dfrac{1}{55}+\dfrac{1}{1155} = \dfrac{2}{105}$, откуда $\dfrac{1}{x} = 105$. Значит, Винни Пух насчитает 105 ступенек.

Ответ: *105 ступенек.*

№4(20). При каких значениях a уравнение $\log_5 x + 4(1-a^2)\log_{25x} 5 - 2 = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше $\dfrac{24}{5}$?

Решение.

Допустимые значения x определяются условиями $x > 0, x \neq \dfrac{1}{25}$.

Предполагая, что эти условия выполнены, и переходя к логарифмам по основанию 5, преобразуем уравнение исходное к виду $\log_5 x + \dfrac{4(1-a^2)}{2+\log_5 x} - 2 = 0$ или $\log_5^2 x - 4a^2 = 0$, откуда $\log_5 x = \pm 2a$. Следовательно, уравнение имеет два корня $x_1 = 5^{2a}$, $x_2 = 5^{-2a}$.

Если $a = 0$, то $x_1 = x_2 = 1$, а если $|a| = 1$, то одно из чисел x_1, x_2 равно $\dfrac{1}{25}$. Значит, уравнение имеет всего один корень и поэтому значения $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$ не удовлетворяют условию задачи.

Пусть $a \neq 0, |a| \neq 1$, тогда исходное уравнение имеет два различных корня.

По условию $|x_1 - x_2| > \dfrac{24}{5}$, т.е. $\left|5^{2a} - 5^{-2a}\right| > \dfrac{24}{5}$.

Если $a \geqslant 0$, то $5^{2a} \geqslant 5^{-2a}$ и неравенство $\left|5^{2a} - 5^{-2a}\right| > \dfrac{24}{5}$ равносильно неравенству: $5^{2a} - 5^{-2a} > \dfrac{24}{5} \Leftrightarrow \left(5^{2a}\right)^2 - \dfrac{24}{5} \cdot 5^{2a} - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(5^{2a} - 5\right)\left(5^{2a} + \dfrac{1}{5}\right) > 0 \Leftrightarrow 5^{2a} > 5 \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{2}$.

Если $a < 0$, то неравенство $\left|5^{2a} - 5^{-2a}\right| > \dfrac{24}{5}$ равносильно неравенству $5^{-2a} - 5^{2a} > \dfrac{24}{5} \Leftrightarrow$ $\left(5^{2a}\right)^2 + \dfrac{24}{5} \cdot 5^{2a} - 1 < 0 \Leftrightarrow \left(5^{2a} + 5\right)\left(5^{2a} - \dfrac{1}{5}\right) < 0 \Leftrightarrow 5^{2a} < \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow a < -\dfrac{1}{2}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют значения $|a| > \dfrac{1}{2}, |a| \neq 1$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

№5(25). Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, $AO = 2$, $OC = 3$. Точка K расположена на стороне BC так, что $BK : KC = 1 : 2$, а треугольник AKD является равносторонним. Найдите его площадь.

Решение.

Пусть E - основание перпендикуляра, опущенного из точки K на AC, $AK = a$, $\angle KAC = \alpha$. Тогда $\angle CAD = \dfrac{\pi}{3} - \alpha$, $AE = AK \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha$. Из равенств $OE + EC = OC = 3$ и $OE : EC = BK : KC = 1 : 2$ следует, что $OE = 1$, $AE = AO + OE = 3 = a\cos\alpha$. Но $\angle DAO = \dfrac{\pi}{3} - \alpha$ и поэтому $AO = a\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = 2$.

Из уравнений $a\cos\alpha = 3$ и $a\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = 2$ находим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{7}}$, $a = \dfrac{3}{\cos\alpha} = 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$. Искомая площадь $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$.