

№1(20). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7, \\ xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение: Вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2. Получим

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1,$$

$$(x - y)^2 = 1.$$

Откуда $x - y = 1$ или $x - y = -1$.

1) Если $x - y = 1$, то $x = 1 + y$. Тогда второе уравнение примет вид $(1 + y)y + y^2 = 3$, т.е. $2y^2 + y - 3 = 0$. Корни уравнения $y = 1$ и $y = -\frac{3}{2}$. Следовательно, $(2; 1), (-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$ – решения системы.

2) Если $x - y = -1$, то $x = y - 1$. Тогда второе уравнение примет вид $(y - 1)y + y^2 = 3$, т.е. $2y^2 - y - 3 = 0$. Корни уравнения $y = 1$ и $y = \frac{3}{2}$. Следовательно, $(-2; -1), (\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ – решения системы.

Ответ: $(2; 1), (-2; -1), (\frac{1}{2}; \frac{3}{2}), (-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$.

№2(20). Найдите все действительные корни уравнения

$$|x - \sqrt{x} - 3| + |-x + \sqrt{x} + 7| = 6.$$

Решение: Введем замену $x - \sqrt{x} - 3 = y$, тогда $-x + \sqrt{x} + 7 = -y + 4$. Тогда уравнение примет вид $|y| + |y - 4| = 6$.

$$\left[\begin{cases} y \geq 4, \\ y + y - 4 = 6, \\ 0 < y < 4, \\ y + 4 - y = 6, \\ y \leq 0, \\ -y + 4 - y = 6. \end{cases} \right.$$

Очевидно, что вторая система не имеет решений. Тогда

$$\left[\begin{cases} y \geq 4, \\ 2y = 10, \\ y \leq 0, \\ -2y = 2. \end{cases} \right.$$

Значит, $y = 5$ и $y = -1$. Возвращаемся к замене

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} - 3 = 5, \\ x - \sqrt{x} - 3 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} - 8 = 0, \\ x - \sqrt{x} - 2 = 0. \end{cases}$$

$$1) x - \sqrt{x} - 8 = 0.$$

Пусть $\sqrt{x} = t$, $t \geq 0$. Тогда $t^2 - t - 8 = 0 \Rightarrow D = 1 + 4 \cdot 8 = 33 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$.

Т.к. $t \geq 0$, то $t = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$, т.е. $\sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$. Значит, $x = \frac{33 + 2\sqrt{33} + 1}{4} = \frac{17 + \sqrt{33}}{2}$ – решение уравнения.

$$2) x - \sqrt{x} - 2 = 0.$$

Пусть $\sqrt{x} = t$, $t \geq 0$. Тогда $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 2$ и $t = -1$.

Т.к. $t \geq 0$, то $t = 2$. Т.е. $\sqrt{x} = 2$, значит, $x = 4$ – решение уравнения.

Ответ: $x = 4; x = \frac{17 + \sqrt{33}}{2}$.

№3(20). Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 42кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 40% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 37% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором сосуде?

Решение: Пусть x – концентрация кислоты в I растворе; y – концентрация кислоты во II растворе.

	масса р-ра	концентрация	масса чистой кислоты
I	30	x	$30x$
II	42	y	$42y$
смесь	72	0,4	$72 \cdot 0,4$

Т.к. масса чистой кислоты в I и II растворах равна массе чистой кислоты в смеси, то составим уравнение

$$30x + 42y = 72 \cdot 0,4.$$

Предположим, что во втором случае мы сливали раствор массой m кг. Тогда

	масса р-ра	концентрация	масса чистой кислоты
I	m	x	x
II	m	y	y
смесь	$2m$	0,37	$2m \cdot 0,37$

Т.к. масса чистой кислоты в I и II растворах равна массе чистой кислоты в смеси, то составим уравнение

$$xm + ym = 2m \cdot 0,37.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 30x + 42y = 72 \cdot 0,4, & (1) \\ x + y = 2 \cdot 0,37. & (2) \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения, умноженного на 42, первое уравнение. Имеем

$$12x = 2 \cdot 0,37 \cdot 42 - 72 \cdot 0,4,$$

$$12x = 2,28,$$

$$x = 0,19.$$

Тогда $y = 2 \cdot 0,37 - 0,19 = 0,55$. Значит, масса чистой кислоты во II растворе равна $42 \cdot 0,55 = 23,1$ (кг).

Ответ: 23,1 кг.

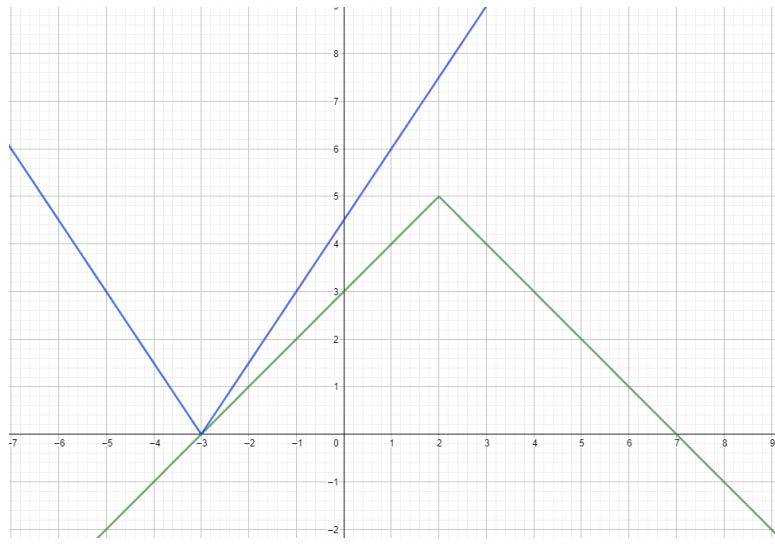
№4(20). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|x - 2| + a|x + 3| = 5$$

имеет ровно два корня. Найдите эти корни.

Решение: $a|x + 3| = 5 - |x - 2|$.

Построим графики функций $y = 5 - |x - 2|$ и $y = a|x + 3|$.



При $|a| < 1$ графики функций имеют общие точки с абсциссой $x_2 > 2$. Т.к. $|x-2| = x-2$, $|x+3| = x+3$ при $x > 2$, то x_2 - корень уравнения $a(x+3) = 5-x+2$

$$ax + 3a = 7 - x,$$

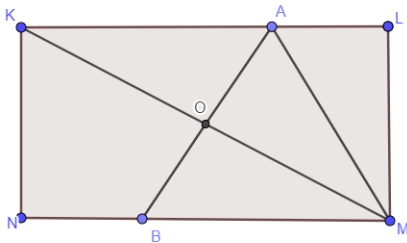
$$x_2 = \frac{7-3a}{a+1}.$$

А $x_1 = -3$. Значит, при $|a| < 1$ уравнение имеет 2 корня $x_1 = -3$ и $x_2 = \frac{7-3a}{a+1}$.

Ответ: $-1 < a < 1$; $x_1 = -3, x_2 = \frac{7-3a}{a+1}$.

№5(20). Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите площадь прямоугольника $KLMN$.

Решение:



O - середина KM . Так как $\triangle BOM = \triangle AOK$. Значит, $BO = OA = \frac{AB}{2} = 3$.

Заметим, что $\triangle BOM = \triangle OAM$ (прямоугольные, OM - общий катет, $BO = OA$). Значит, $AM = BM = 6$.

Следовательно, $\triangle ABM$ - равносторонний, тогда $\angle BMA = 60^\circ$, значит, $\angle AML = 30^\circ$. $AL = MA \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot 1/2 = 3$; $ML = AM \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}$. Тогда $S_{KLMN} = ML \cdot KL = (KA + AL) \cdot ML = (6 + 3) \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

Ответ: $S_{KLMN} = 27\sqrt{3}$.

№1(20). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = 10, \\ \frac{y^3}{x} + xy = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Решение: Введем замену $\frac{x^2}{y^2} = u$, $xy = v$. Тогда уравнения принимают вид

$$\begin{cases} uv + v = 10, \\ \frac{v}{u} + v = \frac{5}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(u + 1) = 10, \\ v(\frac{1}{u} + 1) = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Т.к. $v = 0$ – не решение, то поделим первое уравнение на второе. Имеем

$$\frac{u + 1}{\frac{1}{u} + 1} = \frac{10 \cdot 2}{5},$$

$$\frac{(u + 1)u}{u + 1} = 4,$$

$$u = 4.$$

Тогда $v = \frac{10}{u + 1} = \frac{10}{4 + 1} = 2$. Вернемся к замене:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} = 4, \\ xy = 2, \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ xy = 2, \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} \frac{x}{y} = -2, \\ xy = 2, \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x = -2, \\ y = -1, \end{cases} \right.$$

Ответ: $(2; 1), (-2; -1)$.

№2(20). Решите неравенство $\sqrt{\frac{1}{x^2 + 2x - 3}} \geq \frac{1}{4 - x}$.

Решение: ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq 4, \\ x^2 + 2x - 3 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 4, \\ (x + 3)(x - 1) > 0. \end{cases}$$

Значит, $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$.

Неравенство равносильно:

$$\left[\begin{cases} 4 - x < 0, \\ x^2 + 2x - 3 > 0, \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > 4, \\ \left[\begin{cases} x < -3, \\ x > 1, \end{cases} \right. \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} 4 - x > 0, \\ \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \geq \frac{1}{16 - 8x + x^2}, \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x < 4, \\ x^2 + 2x - 3 \leq x^2 - 8x + 16, \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > 4, \\ \left[\begin{cases} x < 4, \\ 10x \leq 19, \end{cases} \right. \right. \quad \left[\begin{cases} x > 4, \\ x \leq 1, 9. \end{cases} \right.$$

С учетом ОДЗ, получаем $x < -3; -1 < x \leq 1, 9; x > 4$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 1, 9] \cup (4; +\infty)$.

№3(20). Две точки движутся по двум окружностям, радиусы которых относятся как 1 : 6. Найдите скорость движения каждой точки, если за 10 секунд точка, движущаяся по большей окружности, прошла на 2 м больше и сделала при этом в 5 раз меньше оборотов.

Решение: Пусть x м/с – скорость I точки; y м/с – скорость II точки.

Тогда $10x$ – расстояние, пройденное I точкой за 10с. $10y$ – расстояние, пройденное II точкой за 10с.

Из условия следует $10y - 10x = 2$, т.е. $5y - 5x = 1$.

$\frac{10x}{2\pi r}$ – количество оборотов, сделанных I точкой, где r - радиус I окружности.

$\frac{10y}{2\pi R}$ – количество оборотов, сделанных II точкой, где R - радиус II окружности.

Т.к. $R = 6r$, то составим уравнение

$$\frac{10x}{2\pi r} = 5 \cdot \frac{10y}{2\pi \cdot 6r},$$

$$60x = 50y,$$

$$6x = 5y.$$

Получается система уравнений

$$\begin{cases} 5y - 5x = 1, \\ 6x = 5y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 5x = 1, \\ y = \frac{6}{5}x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1,2. \end{cases}$$

Ответ: 1 м/с и 1,2 м/с.

№4(20). Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|x^2 + 2x| + |x^2 + 3x + 2| = x^2 + 4x + a$$

имеет ровно три различных корня.

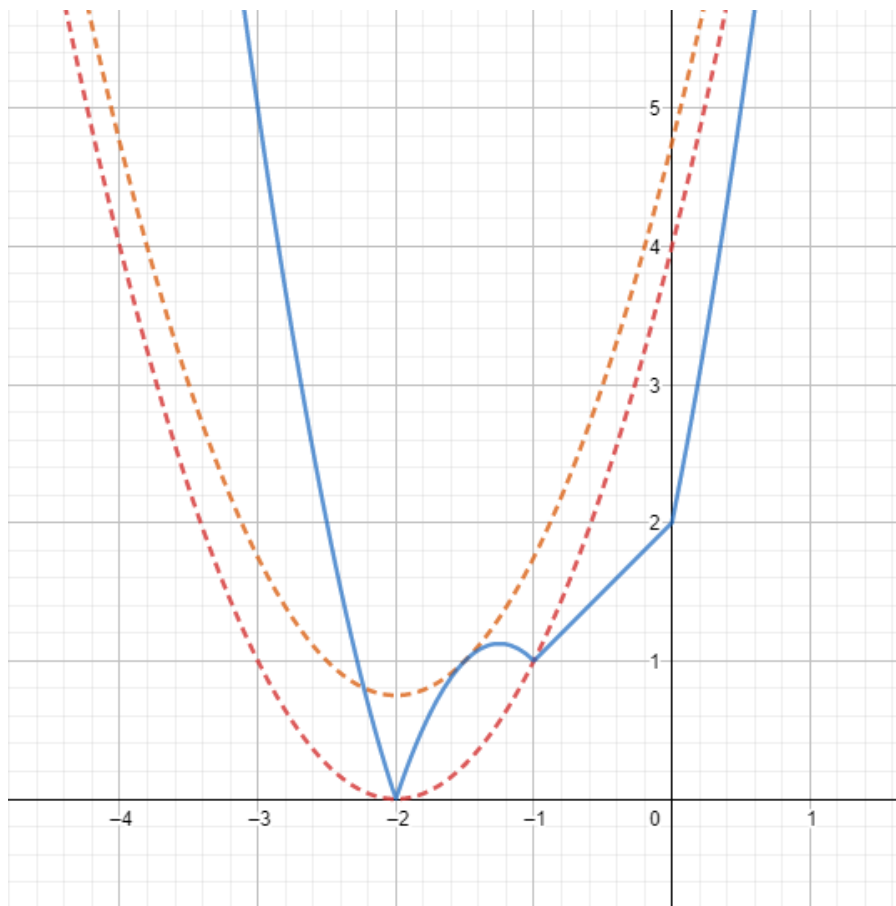
Решение: Построим график функции $y = |x^2 + 2x| + |x^2 + 3x + 2|$.

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + x^2 + 3x + 2, & \text{если } x \geq 0, \\ -x^2 - 2x + x^2 + 3x + 2, & \text{если } -1 < x < 0, \\ -x^2 - 2x - x^2 - 3x - 2, & \text{если } -2 < x \leq -1, \\ x^2 + 2x + x^2 + 3x + 2, & \text{если } x \leq -2, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x^2 + 5x + 2, & \text{если } x \geq 0, \\ x + 2, & \text{если } -1 < x < 0, \\ -2x^2 - 5x - 2, & \text{если } -2 < x \leq -1, \\ 2x^2 + 5x + 2, & \text{если } x \leq -2. \end{cases}$$

Для $y = 2x^2 + 5x + 2$, $x \geq 0$

$$1) x_0 = -\frac{5}{4}; y_0 = y(x_0) = 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 2 = -\frac{25}{8} + 2 = -\frac{9}{8}.$$



Рассмотрим функцию $y = x^2 + 4x + a$. Это парабола, ветви которой направлены вверх, $x_0 = \frac{-4}{2} = -2$, $y_0 = y(x_0) = a - 4$.

Возможны 2 случая, при которых будет три решения:

1) Вершина находится в точке $(-2; 0)$, т.е. $a = 4$. Тогда решение $x = -2; x = -1$ и

$$2x^2 + 5x + 2 = x^2 + 4x + 4, \quad x > -1$$

$$0 = x^2 + x - 2, \quad x > -1$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ \begin{cases} x = -2, \\ x = 1. \end{cases} \Rightarrow x = 1. \end{cases}$$

2) И когда $y = x^2 + 4x + a$ касается $y = -2x^2 - 5x - 2$ на $x \in (-2; -1)$, т.е. уравнение $x^2 + 4x + a = -2x^2 - 5x - 2$ имеет единственное решение.

$$3x^2 + 9x + 2 + a = 0$$

$$D = 81 - 12(2 + a) = 0$$

$$81 - 24 - 12a = 0$$

$$57 = 12a$$

$$a = \frac{19}{4}$$

Ответ: $a = \frac{19}{4}$ и $a = 4$.

№5(20). Две неперпендикулярные прямые пересекаются в точке A ; B и C — проекции точки M на эти прямые. Найдите угол между прямой BC и прямой, проходящей через середины отрезков AM и BC .

Решение: Поскольку из точек B и C отрезок AM виден под прямым углом, эти точки лежат на окружности, построенной на отрезке AM как на диаметре.

Прямая, проходящая через середину AM , содержит диаметр этой окружности. Диаметр, проходящий через середину хорды BC , перпендикулярен этой хорде, следовательно, искомый угол равен 90° .

Ответ: 90° .

№1(20). Решите уравнение

$$\log_3(3x^4 + 42) = 1 + \log_{\sqrt{3}} \sqrt{13x^2 + 2}$$

и найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5}{4}; 2\right]$.

Решение:

1) Т.к. $3x^4 + 42 > 0$ и $13x^2 + 2 > 0$ для любых действительных x , то ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\log_3(3x^4 + 42) = \log_3 3 + \log_3(13x^2 + 2),$$

$$\log_3(3x^4 + 42) = \log_3 3(13x^2 + 2).$$

Значит, $3x^4 + 42 = 3(13x^2 + 2)$

$$x^4 + 14 = 13x^2 + 2,$$

$$x^4 - 13x^2 + 12 = 0,$$

$$(x^2 - 12)(x^2 - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}, \\ x = -2\sqrt{3}, \\ x = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

2) Т.к. $2\sqrt{3} > 2$, $-2\sqrt{3} < -\frac{5}{4}$, то только $x = \pm 1$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{5}{4}; 2\right]$.

Ответ: 1) $x = \pm 2\sqrt{3}$, $x = \pm 1$; 2) $x = \pm 1$.

№2(20). Решите неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 + 3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}}.$$

Решение:

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 7 > 0, & (1) \\ x^2 + 3x \geq 0, & (2) \\ \sqrt{x^2 + 3x} \neq 2. & (3) \end{cases}$$

Неравенство (1) выполнено для любого $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0, \\ 2 \neq \sqrt{x^2 + 3x}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \neq 0, & \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -4, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq -3, \end{cases} & \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq -3. \end{cases} \end{cases}$$

Т.е. $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup [0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 + 3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 + 3}}.$$

Заметим, что при $x \geq 0, x \neq 1$ справедливо неравенство $\sqrt{(x+2)^2 + 3} \geq \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$.

А при $x \leq -3, x \neq -4$ справедлива оценка $\sqrt{(x+2)^2 + 3} \geq \sqrt{1+3} = 2$.

Также $2 - \sqrt{x^2 + 3x} \leq 2$ при всех x из ОДЗ. Значит, $\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 + 3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}}$ равносильно

следующему

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0, \\ 2 - \sqrt{x^2 + 3x} < 0, \\ \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x} = 0, \\ \sqrt{(x+2)^2 + 3} = 2, \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 = 1, \\ x + 2 = -1, \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x = -3, \\ x > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -4. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup \{-3\} \cup (1; +\infty)$.

№3(20). Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найдите второй член прогрессии.

Решение: По условию задачи составим систему уравнений

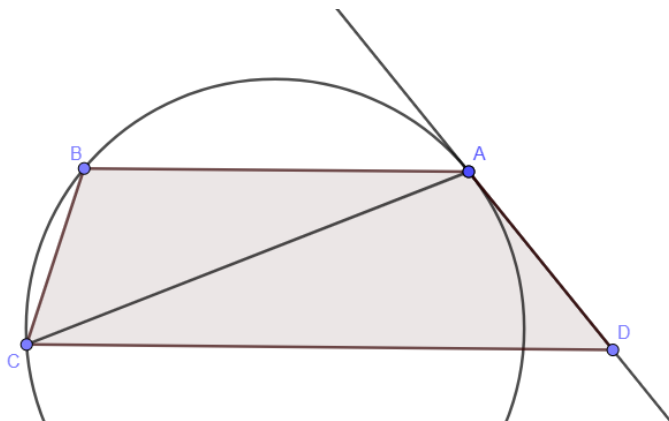
$$\begin{cases} b_1 \cdot b_5 = 12, \\ \frac{b_2}{b_4} = 3, \end{cases} \begin{cases} b_1 \cdot b_1 \cdot q^4 = 12, \\ \frac{b_1 \cdot q}{b_1 \cdot q^3} = 3, \end{cases} \begin{cases} b_1^2 \cdot q^4 = 12, \\ \frac{1}{q^2} = 3, \end{cases} \begin{cases} q^2 = \frac{1}{3}, \\ b_1^2 = 12 \cdot 9. \end{cases}$$

Тогда $b_1^2 \cdot q^2 = \frac{12 \cdot 9}{3} = 36$. Значит, $b_2 = b_1 \cdot q = \pm 6$.

Ответ: $b_2 = \pm 6$.

№4(20). В трапеции $ABCD$ большее основание CD равно a , меньшее равно b . Окружность, проходящая через вершины A , B и C , касается стороны AD . Найдите диагональ AC .

Решение:



$\angle BAC = \angle ACD$ как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$ и секущей AC . $\angle DAC = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AC$ по теореме об угле между касательной и хордой.

Значит, $\triangle ADC \sim \triangle BCA$. Следовательно, $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot DC \Rightarrow AC = \sqrt{ab}$.

Ответ: $AC = \sqrt{ab}$.

№5(20). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y - 10| + |x + 3| - 2)(x^2 + y^2 - 6) = 0, \\ (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = a. \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Решение: Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y - 10| + |x + 3| = 2$ и $x^2 + y^2 = 6$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-3; 10)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{6}$.

Второе уравнение исходной системы при $a > 0$ задаёт окружность Ω с центром $(-3; 5)$ радиуса $R = \sqrt{a}$ (при $a < 0$ пустое множество, при $a = 0$ одну точку — в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R = \sqrt{34} \pm \sqrt{6}$, две общие точки при $R \in (\sqrt{34} - \sqrt{6}; \sqrt{34} + \sqrt{6})$ и ни одной общей точки при остальных R . Окружность Ω имеет с

квадратом G одну общую точку при $R = 3$ или $R = 7$, две общие точки при $R \in (3; 7)$ и ни одной общей точки при остальных R .

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R , при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R = \sqrt{34} - \sqrt{6}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $3 < \sqrt{34} - \sqrt{6} < 7$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R = \sqrt{34} + \sqrt{6}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{34} + \sqrt{6} > 7$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R = 7$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{34} - \sqrt{6} < 7 < \sqrt{34} + \sqrt{6}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R = 3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $3 < \sqrt{34} - \sqrt{6}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R = 7$ и $R = \sqrt{34} - \sqrt{6}$. Тогда $a = 49$ и $a = 40 - 4\sqrt{51}$.

Ответ: $a = 49$ и $a = 40 - 4\sqrt{51}$.