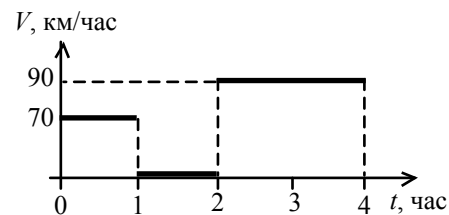


7 класс

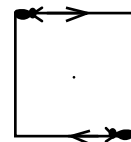
1. (30 баллов) Два автомобиля выехали одновременно: один из пункта А в пункт Б, другой – из Б в А. Скорость одного автомобиля изменялась со временем так, как показано на рисунке, и этот автомобиль прибыл в пункт назначения через 4 часа. Скорость другого автомобиля была постоянной и равной 60 км/час. Через какое время после начала движения автомобили встретились?



Ответ: Автомобили встретились через 2 часа 24 минуты.

Решение: Из приведенного на рисунке графика движения одного из автомобилей нетрудно найти расстояние между городами: $70 \text{ км/час} \cdot 1 \text{ час} + 90 \text{ км/час} \cdot 2 \text{ час} = 250 \text{ км}$. За 2 часа автомобиль, скорость которого приведена на графике, проехал 70 км, а другой автомобиль – 120 км. Таким образом, через 2 часа после начала движения автомобили оказались на расстоянии $250 - (70 + 120) = 60 \text{ км}$ друг от друга. Скорость сближения автомобилей в ходе последующего движения равнялась $90 + 60 = 150 \text{ км/час}$. Следовательно, автомобили преодолели отрезок в 60 км за 24 минуты. В итоге, полное время движения до встречи составило 2 часа 24 минуты.

2. (30 баллов) Два жучка одновременно начинают равномерное движение со скоростью V по сторонам неподвижного проволочного квадрата со стороной a из его противоположных углов (см. рис.). Через какое время скорость сближения жучков станет минимальной?



Ответ: Через время $a/(2V)$.

Решение: Вначале расстояние между жучками уменьшается, достигает минимального значения a (когда жучки окажутся на серединах сторон) и затем начинает возрастать. В момент наибольшего сближения скорость сближения обращается в нуль, т.е. достигает минимума.

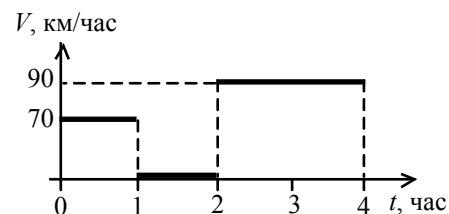
3. (40 баллов) В сосуде находится 1 литр масла с плотностью 800 кг/м^3 и кусок льда массой 1 кг. На сколько изменится средняя плотность содержимого сосуда после таяния льда? Плотность льда 900 кг/м^3 , плотность воды 1000 кг/м^3 .

Ответ: Средняя плотность увеличится на $900/19 \text{ кг/м}^3$.

Решение: Среднюю плотность содержимого находим как отношение массы вещества в сосуде к объему этого вещества. Масса вещества равна сумме масс льда/воды (1 кг) и масла (0,8 кг). Начальный объем содержимого равен сумме объемов льда ($1/900 \text{ м}^3$) и масла ($1/1000 \text{ м}^3$). При этом начальная средняя плотность равна $1,8 : (1/900 + 1/1000) = 900 \cdot 18/19 \text{ кг/м}^3$. Конечный объем содержимого равен сумме объемов воды ($1/1000 \text{ м}^3$) и масла ($1/1000 \text{ м}^3$), поэтому конечная средняя плотность равна 900 кг/м^3 . Окончательно находим изменение средней плотности как $900 - 900 \cdot 18/19 = 900/19 \text{ кг/м}^3$.

8 класс

1. (30 баллов) Два автомобиля выехали одновременно: один из пункта А в пункт Б, другой – из Б в А. Скорость одного автомобиля изменялась со временем так, как показано на рисунке, и этот автомобиль прибыл в пункт назначения через 4 часа. Скорость другого автомобиля была постоянной и равной 60 км/час. Через какое время после начала движения автомобили встретились?



Ответ: Автомобили встретились через 2 часа 24 минуты.

Решение: Из приведенного на рисунке графика движения одного из автомобилей нетрудно найти расстояние между городами: $70 \text{ км/час} \cdot 1 \text{ час} + 90 \text{ км/час} \cdot 2 \text{ час} = 250 \text{ км}$. За 2 часа автомобиль, скорость которого приведена на графике, проехал 70 км, а другой автомобиль – 120 км. Таким образом, через 2 часа после начала движения автомобили оказались на расстоянии $250 - (70 + 120) = 60 \text{ км}$ друг от друга. Скорость сближения автомобилей в ходе последующего движения равнялась $90 + 60 = 150 \text{ км/час}$. Следовательно, автомобили преодолели отрезок в 60 км за 24 минуты. В итоге, полное время движения до встречи составило 2 часа 24 минуты.

2. (40 баллов) В цилиндрическом сосуде с водой и налитым поверх нее маслом плавает шар объемом V с полостью объемом $V/10$ внутри. Через небольшое отверстие в верхней части оболочки шара в полость начинает поступать масло. Пока полость была свободна от масла, шар плавал наполовину погруженным в воду, не выступая над верхним уровнем масла. На сколько изменится уровень воды после того, как полость заполнится маслом? Плотность масла равна $0,8$ плотности воды, площадь дна сосуда равна S .

Ответ: Уровень воды поднимется на $0,4V/S$.

Решение: Запишем условие плавания шара с пустой полостью в виде

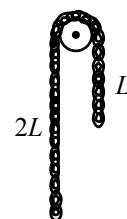
$$m = 0,8\rho \frac{V}{2} + \rho \frac{V}{2} = 0,9\rho V,$$

где m – масса шара, V – его объем, а ρ – плотность воды. Здесь учтено, что плотность масла равна $0,8\rho$. Условие плавания шара с заполненной маслом полостью можно записать в виде

$$m + 0,8\rho \frac{V}{10} = \rho V_1 + 0,8\rho(V - V_1),$$

где V_1 – объем погруженной в воду части шара. Из системы двух уравнений находим, что $V_1 = 0,9V$. Поскольку вначале в воду была погружена половина объема шара, подъем уровня воды находим как $(0,9V - 0,5V)/S = 0,4V/S$.

3. (30 баллов) Цепочка длины $3L$ состоит из двух частей с длинами L и $2L$, сделанных из металлов разной плотности. Цепочка переброшена через блок так, как показано на рисунке, и находится в равновесии. После того, как цепочку полностью погрузили в воду, подставив снизу сосуд с водой, для восстановления равновесия пришлось к одному из концов цепочки подвесить кусок длины $L/3$, сделанный из более легкого металла. Считая, что размеры всех звеньев цепочки одинаковы и масса части цепочки, наброшенной на блок, пренебрежимо мала, найти отношение плотности любого из металлов к плотности воды. Считать, что неустойчивость равновесия устраняется небольшим трением в оси блока.



Ответ: Плотность одного металла в 4 раза больше плотности воды, другого – в 8 раз.

Решение: Из условия равновесия цепочки до погружения в воду следует, что плотность металла, из которого сделана часть цепочки длины L , в 2 раза больше плотности другого металла, т.е. $\rho_2 = 2\rho_1$. Для сохранения равновесия цепочки после ее погружения в воду дополнительный кусок нужно подвесить, очевидно, к участку длины $2L$, на который действует большая выталкивающая сила. Из условия равновесия погруженной в воду цепочки (с подвешенным куском) следует, что

$$(\rho_1 - \rho_v) \frac{7}{3} L = (\rho_2 - \rho_v) L,$$

где ρ_v – плотность воды. Подставляя сюда соотношение $\rho_2 = 2\rho_1$, находим отношения плотностей металлов к плотности воды: $\rho_1/\rho_v = 4$, $\rho_2/\rho_v = 8$.

9 класс

1. (30 баллов) Движущаяся вдоль оси x с постоянным ускорением частица проходит точку x_0 со скоростью $V_x = V$ ($V > 0$), а затем точку $-x_0$ со скоростью $V_x = -2V$. В какой точке скорость частицы была равной нулю?

Ответ: В точке $5x_0/3$.

Решение: Запишем соотношения

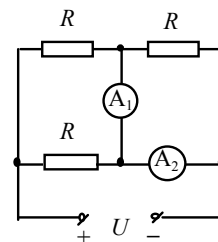
$$(-2V)^2 - V^2 = 2a_x(-x_0 - x_0), \quad 0 - V^2 = 2a_x(x - x_0),$$

где a_x – проекция ускорения частицы на ось x , а x – координата точки, в которой скорость частицы была равна нулю. Исключая a_x , находим, что $x = 5x_0/3$.

Возможно также решение с использованием формул зависимости координаты и скорости от времени.

2. (40 баллов) Цепь, составленная из резисторов с сопротивлениями R и амперметров с пренебрежимо малыми сопротивлениями, подключена к источнику с напряжением U (см. рис.). Найти показания амперметров.

Ответ: A_1 показывает ток U/R , A_2 – ток $2U/R$.



Решение: Поскольку сопротивления амперметров пренебрежимо малы, можно считать, что напряжение источника подводится к каждому из двух расположенных в левой части цепи резисторов. Следовательно, ток через каждый из этих резисторов равен U/R . Ток через третий резистор не течет, т.к. этот резистор зашунтирован двумя амперметрами. При этом ток через A_1 равен току через верхний левый резистор, т.е. U/R , а ток через A_2 равен сумме токов через A_1 и левый нижний резистор, т.е. $2U/R$.

3. (30 баллов) В цилиндрическом сосуде с водой и налитым поверх нее маслом плавает шар объемом V с полостью объемом $V/10$ внутри. Через небольшое отверстие в верхней части оболочки шара в полость начинает поступать масло. Пока полость была свободна от масла, шар плавал наполовину погруженным в воду, не выступая над верхним уровнем масла. На сколько изменится уровень воды после того, как полость заполнится маслом? Плотность масла равна $0,8$ плотности воды, площадь дна сосуда равна S .

Ответ: Уровень воды поднимется на $0,4V/S$.

Решение: Запишем условие плавания шара с пустой полостью в виде

$$m = 0,8\rho \frac{V}{2} + \rho \frac{V}{2} = 0,9\rho V,$$

где m – масса шара, V – его объем, а ρ – плотность воды. Здесь учтено, что плотность масла равна $0,8\rho$. Условие плавания шара с заполненной маслом полостью можно записать в виде

$$m + 0,8\rho \frac{V}{10} = \rho V_1 + 0,8\rho(V - V_1),$$

где V_1 – объем погруженной в воду части шара. Из системы двух уравнений находим, что $V_1 = 0,9V$. Поскольку вначале в воду была погружена половина объема шара, подъем уровня воды находим как $(0,9V - 0,5V)/S = 0,4V/S$.

10 класс

1. (30 баллов) Под каким углом к горизонту было брошено тело, если в течение трети времени полета высота тела над землей была меньше его текущей горизонтальной удаленности от точки броска?

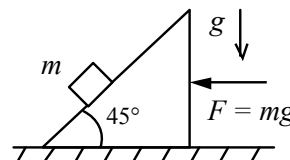
Ответ: Угол броска α определяется соотношением $\operatorname{tg}\alpha = 3$, т.е. $\alpha \approx 72^\circ$.

Решение: Выберем ось x горизонтально и ось y вертикально с началом в точке броска. Считая, что бросок произвели в момент $t = 0$ со скоростью V_0 под углом α к горизонту, запишем текущее горизонтальное удаление $x(t)$ и текущую высоту $y(t)$ в виде

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2},$$

где g – ускорение свободного падения. Условие $x > y$ на трети времени полета может выполняться только на последней трети времени полета, т.е. $x = y$ в момент $t = \frac{2}{3} \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$. Из записанных соотношений находим, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

2. (30 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина пренебрежимо малой массы, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к клину горизонтальную силу $F = mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Найти ускорение бруска и силу, с которой клин давит на стол.



Ответ: Ускорение бруска равно g и направлено горизонтально в направлении действия силы F . Клин давит на стол с силой mg .

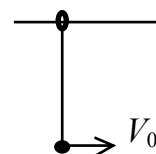
Решение: Сумма сил, действующих на клин пренебрежимо малой массы, должна быть равна нулю, иначе клин получит бесконечное ускорение. Пусть N – сила, с которой брусок давит на клин (перпендикулярно наклонной грани клина вправо-вниз). Тогда из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в горизонтальном направлении, т.е. из равенства

$$N \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

следует, что $N = \sqrt{2}mg$. Из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в вертикальном направлении, следует, что сила со стороны стола на клин равна вертикальной компоненте силы N , т.е. mg . С такой же по величине силой и клин давит на стол.

Клин действует на брусок с силой, равной по величине $N = \sqrt{2}mg$ и направленной перпендикулярно наклонной грани клина влево-вверх. Вертикальная компонента этой силы равна mg и уравнивает действующую на брусок силу тяжести. Горизонтальная же компонента, также равная mg , сообщает бруску ускорение, равное по величине g и направленное влево.

3. (40 баллов) Шарик висит на идеальной нити, прикрепленной к кольцу, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. Массы шарика и кольца равны. После того, как шарiku сообщили скорость V_0 вдоль спицы (см. рис.), максимальный угол отклонения нити от вертикали оказался равным 90° . Найти скорость шарика в момент, когда нить в первый раз составляла с вертикалью угол 60° .



Ответ: Скорость шарика равнялась $\frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{27+2\sqrt{14}}{14}}$.

Решение: Найдем вначале длину нити. Для это свяжем законами сохранения энергии и импульса начальное состояние системы и состояние с максимальным (на 90°) отклонением нити:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_1^2}{2} + mgL, \quad mV_0 = mV_1 + mV_1.$$

Здесь учтено, что из-за неразрывности нити шарик и кольцо имеют одинаковую скорость (V_1) в положении максимального отклонения и через m , g и L обозначены масса каждого из тел, ускорение свободного падения и длина нити. Из записанных уравнений находим, что $L = \frac{V_0^2}{4g}$.

Рассмотрим теперь состояние системы с отклонением нити на 60° . Запишем законы сохранения энергии и импульса в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_k^2}{2} + \frac{mV_r^2}{2} + \frac{mV_b^2}{2} + mgL(1 - \cos 60^\circ), \quad mV_0 = mV_k + mV_r,$$

где через V_k обозначена скорость кольца, а через V_r и V_b – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости шарика. Запишем также кинематическую связь – условие равенства скоростей кольца и шарика в проекции на нить:

$$V_k \sin 60^\circ = V_r \sin 60^\circ - V_b \cos 60^\circ.$$

Здесь учтено, что вертикальная скорость шарика направлена вверх при первом прохождении положения с отклонением нити на 60° . Исключая из записанных уравнений, например, V_k и V_b , приходим к квадратному уравнению для V_r :

$$56V_r^2 - 56V_0V_r + 13V_0^2 = 0,$$

откуда получаем

$$V_r = \frac{14 \pm \sqrt{14}}{28} V_0 = \frac{\sqrt{14} \pm 1}{2\sqrt{14}} V_0.$$

Чтобы выбрать правильное значение знака, подставим полученное выражение в формулу для вертикальной компоненты скорости $V_b = \sqrt{3}(2V_r - V_0)$, которая следует из записанных выше уравнений сохранения импульса и кинематической связи. В результате получим

$$V_b = \pm \sqrt{\frac{3}{14}} V_0.$$

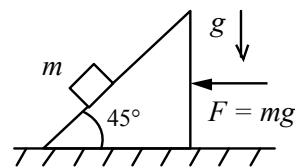
Из условия $V_b > 0$ (шарик движется вверх в рассматриваемом положении) следует, что в полученных решениях для V_r и V_b нужно выбрать верхний знак. Таким образом, для компонент скорости окончательно имеем

$$V_r = \frac{\sqrt{14}+1}{2\sqrt{14}} V_0, \quad V_b = \sqrt{\frac{3}{14}} V_0.$$

Величина скорости шарика $V_{ш}$ находится как

11 класс

1. (30 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина пренебрежимо малой массы, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к клину горизонтальную силу $F = mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Найти ускорение бруска и силу, с которой клин давит на стол.



Ответ: Ускорение бруска равно g и направлено горизонтально в направлении действия силы F . Клин давит на стол с силой mg .

Решение: Сумма сил, действующих на клин пренебрежимо малой массы, должна быть равна нулю, иначе клин получит бесконечное ускорение. Пусть N – сила, с которой брусок давит на клин (перпендикулярно наклонной грани клина вправо-вниз). Тогда из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в горизонтальном направлении, т.е. из равенства

$$N \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

следует, что $N = \sqrt{2}mg$. Из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в вертикальном направлении, следует, что сила со стороны стола на клин равна вертикальной компоненте силы N , т.е. mg . С такой же по величине силой и клин давит на стол.

Клин действует на брусок с силой, равной по величине $N = \sqrt{2}mg$ и направленной перпендикулярно наклонной грани клина влево-вверх. Вертикальная компонента этой силы равна mg и уравнивает действующую на брусок силу тяжести. Горизонтальная же компонента, также равная mg , сообщает бруску ускорение, равное по величине g и направленное влево.

2. (40 баллов) Два разноименных точечных заряда, величины которых отличаются в 4 раза, расположены на расстоянии d друг от друга. Найти минимальное расстояние между меньшим по модулю зарядом и эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала. Потенциал на бесконечности принять равным нулю.

Ответ: Минимальное расстояние между зарядом q и эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала равно $d/5$.

Решение: Обозначим заряды через q и $-4q$. Используя принцип суперпозиции для потенциала и формулу для потенциала поля точечного заряда, запишем уравнение для определения геометрического места точек с нулевым потенциалом в виде

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0,$$

где R_1 и R_2 – расстояния до произвольной точки с нулевым потенциалом от зарядов q и $-4q$ соответственно (ϵ_0 – электрическая постоянная). Из данного уравнения получаем, что $R_2 = 4R_1$. Отсюда следует, что R_1 минимально тогда, когда R_2 тоже минимально. Это означает, что ближайшая к заряду q точка с нулевым потенциалом находится между зарядами на прямой, соединяющей эти заряды. В этом случае $R_1 + R_2 = d$ и $R_1 = d/5$.

3. (30 баллов) Два одинаковых пружинных маятника с периодом колебаний T представляют собой лежащие на гладком горизонтальном столе и прикрепленные к стенке пружинами бруски. Колебания маятников возбуждают, сообщив каждому из брусков одну и ту же скорость в направлении от стенки с задержкой в $T/4$. Через какое время после начала движения первого бруска относительная скорость брусков достигнет максимального значения?

Ответ: Через время $3T/8$.

Решение: Будем считать, что движение первого бруска начинается в момент $t = 0$. Направим ось x от стенки и запишем скорости брусков в проекции на эту ось в виде

$$V_{1x} = V_0 \cos \omega t, \quad V_{2x} = V_0 \cos \omega \left(t - \frac{T}{4} \right) = \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Здесь через V_0 обозначена начальная скорость бруска, а через ω – угловая частота колебаний ($\omega = 2\pi/T$). Относительная скорость брусков равна

$$V_{\text{отн}} = |V_{2x} - V_{1x}| = V_0 \left| \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \omega t \right| = 2V_0 \sin \frac{\pi}{4} \left| \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \sqrt{2}V_0 \left| \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Данное выражение, очевидно, достигает в первый раз максимума при $\omega t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, т.е. при $t = 3T/8$.

Исследование относительной скорости как функции времени на максимум можно провести также с помощью производной. В этом случае момент достижения максимума определяется уравнением $\text{tg} \omega t = -1$.