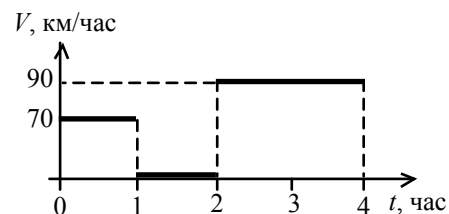


7 класс

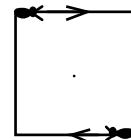
1. (40 баллов) Два автомобиля выехали одновременно: один из пункта А в пункт Б, другой – из Б в А. Скорость одного автомобиля изменялась со временем так, как показано на рисунке, и этот автомобиль прибыл в пункт назначения через 4 часа. Скорость другого автомобиля была постоянной и равной 60 км/час. На сколько отличаются расстояния, пройденные автомобилями к моменту встречи?



Ответ: Автомобиль, который двигался с постоянной скоростью, к моменту встречи прошел на 38 км больше.

Решение: Из приведенного на рисунке графика движения одного из автомобилей нетрудно найти расстояние между городами: $70 \text{ км/час} \cdot 1 \text{ час} + 90 \text{ км/час} \cdot 2 \text{ час} = 250 \text{ км}$. За 2 часа автомобиль, скорость которого приведена на графике, проехал 70 км, а другой автомобиль – 120 км. Таким образом, через 2 часа после начала движения автомобили оказались на расстоянии $250 - (70 + 120) = 60 \text{ км}$ друг от друга. Скорость сближения автомобилей в ходе последующего движения равнялась $90 + 60 = 150 \text{ км/час}$. Следовательно, автомобили преодолели отрезок в 60 км за 24 минуты. В итоге, полное время движения до встречи составило 2 часа 24 минуты. За это время автомобиль, двигавшийся с постоянной скоростью 60 км/час, прошел 144 км. Другой автомобиль прошел до встречи расстояние $250 - 144 = 106 \text{ км}$. Таким образом, разница пройденных расстояний равна 38 км.

2. (30 баллов) Два жучка одновременно начинают равномерное движение со скоростями V и $2V$ по сторонам неподвижного проволоочного квадрата со стороной a из его противоположных углов (см. рис.). Через какое время скорость сближения жучков станет минимальной?



Ответ: Через время $a/(3V)$.

Решение: Вначале расстояние между жучками уменьшается, достигает минимального значения a (когда жучок с меньшей скоростью пройдет $1/3$ своей стороны, а другой – $2/3$ своей) и затем начинает возрастать. В момент наибольшего сближения скорость сближения обращается в нуль, т.е. достигает минимума.

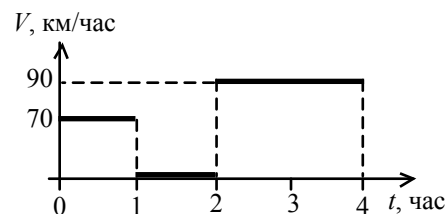
3. (30 баллов) В сосуде находится масло с плотностью 800 кг/м^3 и кусок льда с плотностью 900 кг/м^3 . Средняя плотность содержимого сосуда равна 850 кг/м^3 . Какой станет средняя плотность содержимого после таяния льда? Плотность воды 1000 кг/м^3 .

Ответ: Средняя плотность станет равной $1700/1,9 \approx 895 \text{ кг/м}^3$.

Решение: Средняя плотность содержимого равна отношению массы вещества в сосуде к объему этого вещества. Поскольку до таяния льда средняя плотность равнялась среднему арифметическому плотностей масла и льда, их объемы были равны. Обозначим этот объем через V , тогда массу содержимого можно записать как $850 \cdot 2V \text{ кг}$. После таяния льда объем масла останется равным V , а объем воды будет равным $0,9V$. Тогда средняя плотность будет равна $(850 \cdot 2V)/(V + 0,9V) = 1700/1,9 \approx 895 \text{ кг/м}^3$.

8 класс

1. (30 баллов) Два автомобиля выехали одновременно: один из пункта А в пункт Б, другой – из Б в А. Скорость одного автомобиля изменялась со временем так, как показано на рисунке, и этот автомобиль прибыл в пункт назначения через 4 часа. Скорость другого автомобиля была постоянной и равной 60 км/час. На сколько отличаются расстояния, пройденные автомобилями к моменту встречи?



Ответ: Автомобиль, который двигался с постоянной скоростью, к моменту встречи прошел на 38 км больше.

Решение: Из приведенного на рисунке графика движения одного из автомобилей нетрудно найти расстояние между городами: $70 \text{ км/час} \cdot 1 \text{ час} + 90 \text{ км/час} \cdot 2 \text{ час} = 250 \text{ км}$. За 2 часа автомобиль, скорость которого приведена на графике, проехал 70 км, а другой автомобиль – 120 км. Таким образом, через 2 часа после начала движения автомобили оказались на расстоянии $250 - (70 + 120) = 60 \text{ км}$ друг от друга. Скорость сближения автомобилей в ходе последующего движения равнялась $90 + 60 = 150 \text{ км/час}$. Следовательно, автомобили преодолели отрезок в 60 км за 24 минуты. В итоге, полное время движения до встречи составило 2 часа 24 минуты. За это время автомобиль, двигавшийся с постоянной скоростью 60 км/час, прошел

144 км. Другой автомобиль прошел до встречи расстояние $250 - 144 = 106$ км. Таким образом, разница пройденных расстояний равна 38 км.

2. (40 баллов) В цилиндрическом сосуде с водой и налитым поверх нее маслом плавает шар объемом 10 дм^3 с полостью объемом 1 дм^3 внутри. Через небольшое отверстие в верхней части оболочки шара в полость начинает поступать масло. Пока полость была свободна от масла, шар плавал наполовину погруженным в воду, не выступая над верхним уровнем масла. На сколько изменится давление масла на воду после того, как полость заполнится маслом? Плотность масла 800 кг/м^3 , плотность воды 1000 кг/м^3 , площадь дна сосуда 10 дм^2 , ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

Ответ: Давление масла на воду уменьшится на 400 Па.

Решение: Из условия плавания шара с пустой полостью находим массу шара m :

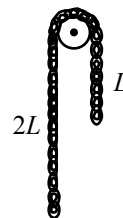
$$m = 800 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 9 \text{ кг.}$$

Условие плавания шара с заполненной маслом полостью можно записать в виде

$$9,8 \text{ кг} = 800 \cdot V_1 + 1000 \cdot (10^{-3} - V_1),$$

где V_1 – объем находящейся в масле части шара. Из последнего уравнения находим $V_1 = 1 \text{ дм}^3$, что на 4 дм^3 меньше, чем вначале. Учитывая также уменьшение объема масла в слое на 1 дм^3 из-за его затекания в полость шара, получаем, что высота слоя масла уменьшится на $(4 \text{ дм}^3 + 1 \text{ дм}^3) : 10 \text{ дм}^2 = 0,5 \text{ дм} = 0,05 \text{ м}$. Отсюда находим, что давление масла на воду уменьшится на $800 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 0,05 \text{ м} = 400 \text{ Па}$.

3. (30 баллов) Цепочка длины $3L$ состоит из двух частей с длинами L и $2L$, сделанных из металлов разной плотности. Цепочка переброшена через блок так, как показано на рисунке, и находится в равновесии. После того, как цепочку полностью погрузили в воду, подставив снизу сосуд с водой, для восстановления равновесия пришлось повернуть блок, изменив длины свисающих концов на $L/10$. Считая, что размеры всех звеньев цепочки одинаковы и масса части цепочки, наброшенной на блок, пренебрежимо мала, найти отношение плотности любого из металлов к плотности воды. Считать, что неустойчивость равновесия устраняется небольшим трением в оси блока.



Ответ: Плотность одного металла в 3 раза больше плотности воды, а другого – в 6 раз.

Решение: Из условия равновесия цепочки до погружения в воду следует, что плотность металла, из которого сделана часть цепочки длины L , в 2 раза больше плотности другого металла, т.е. $\rho_2 = 2\rho_1$. Для сохранения равновесия цепочки после ее погружения в воду нужно повернуть блок в сторону более длинного конца, удлинив его за счет более плотного металла. Из условия равновесия погруженной в воду цепочки следует, что

$$(\rho_1 - \rho_{\text{в}})2L + (\rho_2 - \rho_{\text{в}})\frac{L}{10} = (\rho_2 - \rho_{\text{в}})\frac{9L}{10},$$

где $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды. Подставляя сюда соотношение $\rho_2 = 2\rho_1$, находим отношения плотностей металлов к плотности воды: $\rho_1/\rho_{\text{в}} = 3$, $\rho_2/\rho_{\text{в}} = 6$.

9 класс

1. (30 баллов) Движущаяся вдоль оси x с постоянным ускорением частица проходит точку x_0 со скоростью $V_x = V$ ($V > 0$), а затем точку $-2x_0$ со скоростью $V_x = -2V$. В какой точке скорость частицы была равной нулю?

Ответ: В точке $2x_0$.

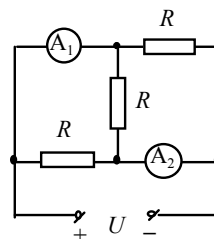
Решение: Запишем соотношения

$$(-2V)^2 - V^2 = 2a_x(-2x_0 - x_0), \quad 0 - V^2 = 2a_x(x - x_0),$$

где a_x – проекция ускорения частицы на ось x , а x – координата точки, в которой скорость частицы была равна нулю. Исключая a_x , находим, что $x = 2x_0$.

Возможно также решение с использованием формул зависимости координаты и скорости от времени.

2. (40 баллов) Цепь, составленная из резисторов с сопротивлениями R и амперметров с пренебрежимо малыми сопротивлениями, подключена к источнику с напряжением U (см. рис.). Найти показания амперметров.



Ответ: Амперметры показывают одинаковые токи $2U/R$.

Решение: Поскольку сопротивления амперметров пренебрежимо малы, можно считать, что напряжение источника подводится к каждому из трех резисторов. Следовательно, ток через каждый из них равен U/R . Ток через средний резистор течет вниз. При этом ток через A_1 равен

сумме токов через средний и правый верхний резисторы, т.е. $2U/R$, а ток через A_2 равен сумме токов через средний и левый нижний резисторы, т.е. тоже $2U/R$.

3. (30 баллов) В цилиндрическом сосуде с водой и налитым поверх нее маслом плавает шар объемом 10 дм^3 с полостью объемом 1 дм^3 внутри. Через небольшое отверстие в верхней части оболочки шара в полость начинает поступать масло. Пока полость была свободна от масла, шар плавал наполовину погруженным в воду, не выступая над верхним уровнем масла. На сколько изменится давление масла на воду после того, как полость заполнится маслом? Плотность масла 800 кг/м^3 , плотность воды 1000 кг/м^3 , площадь дна сосуда 10 дм^2 , ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

Ответ: Давление масла на воду уменьшится на 400 Па .

Решение: Из условия плавания шара с пустой полостью находим массу шара m :

$$m = 800 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 9 \text{ кг}.$$

Условие плавания шара с заполненной маслом полостью можно записать в виде

$$9,8 \text{ кг} = 800 \cdot V_1 + 1000 \cdot (10^{-3} - V_1),$$

где V_1 – объем находящейся в масле части шара. Из последнего уравнения находим $V_1 = 1 \text{ дм}^3$, что на 4 дм^3 меньше, чем вначале. Учитывая также уменьшение объема масла в слое на 1 дм^3 из-за затекания в полость шара, получаем, что высота слоя масла уменьшится на $(4 \text{ дм}^3 + 1 \text{ дм}^3) : 10 \text{ дм}^2 = 0,5 \text{ дм} = 0,05 \text{ м}$. Отсюда находим, что давление масла на воду уменьшится на $800 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 0,05 \text{ м} = 400 \text{ Па}$.

10 класс

1. (30 баллов) Тело бросили с начальной скоростью V_0 под углом 60° к горизонту. Через какое время высота тела над землей превысит текущую горизонтальную удаленность тела от точки броска на максимальную величину? Ускорение свободного падения равно g .

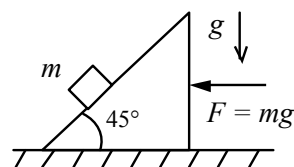
Ответ: Через время $\frac{V_0(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ)}{g} = \frac{V_0(\sqrt{3}-1)}{2g}$.

Решение: Выберем ось x горизонтально, а ось y вертикально с началом в точке броска. Считая, что бросок произвели в момент $t = 0$, запишем текущее горизонтальное удаление $x(t)$ и текущую высоту $y(t)$ в виде

$$x = V_0 \cos 60^\circ t, \quad y = V_0 \sin 60^\circ t - \frac{gt^2}{2}.$$

Разность $y - x = V_0(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ)t - \frac{gt^2}{2}$ зависит от времени по параболическому закону и достигает максимума в вершине параболы, находящейся посередине между корнями $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{2V_0(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ)}{g}$.

2. (30 баллов) Брусok массы m положили на гладкую наклонную грань клина пренебрежимо малой массы, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к клину горизонтальную силу $F = mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Найти ускорение клина и силу, с которой клин давит на стол.



Ответ: Ускорение клина равно g и направлено горизонтально в направлении действия силы F . Клин давит на стол с силой mg .

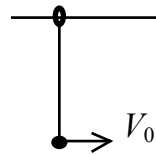
Решение: Сумма сил, действующих на клин пренебрежимо малой массы, должна быть равна нулю, иначе клин получит бесконечное ускорение. Пусть N – сила, с которой брусок давит на клин (перпендикулярно наклонной грани клина вправо-вниз). Тогда из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в горизонтальном направлении, т.е. из равенства

$$N \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

следует, что $N = \sqrt{2}mg$. Из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в вертикальном направлении, следует, что сила со стороны стола на клин равна вертикальной компоненте силы N , т.е. mg . С такой же по величине силой и клин давит на стол.

Чтобы найти ускорение клина, необходимо сначала найти ускорение бруска. Клин действует на брусок с силой, равной по величине $N = \sqrt{2}mg$ и направленной перпендикулярно наклонной грани клина влево-вверх. Вертикальная компонента этой силы равна mg и уравнивает действующую на брусок силу тяжести. Горизонтальная же компонента, также равная mg , сообщает бруску ускорение, равное по величине g и направленное влево. Поскольку ускорение клина также направлено горизонтально и брусок не отрывается от клина, то ускорение клина равно ускорению бруска, т.е. равно g .

3. (40 баллов) Шарик висит на идеальной нити, прикрепленной к кольцу, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. Массы шарика и кольца равны. После того, как шарiku сообщили скорость V_0 вдоль спицы (см. рис.), максимальный угол отклонения нити от вертикали оказался равным 90° . Найти скорость шарика в момент, когда нить во второй раз составляла с вертикалью угол 60° .



Ответ: Скорость шарика равнялась $\frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{27-2\sqrt{14}}{14}}$.

Решение: Найдем вначале длину нити. Для это свяжем законами сохранения энергии и импульса начальное состояние системы и состояние с максимальным (на 90°) отклонением нити:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_1^2}{2} + mgL, \quad mV_0 = mV_1 + mV_1.$$

Здесь учтено, что из-за неразрывности нити шарик и кольцо имеют одинаковую скорость (V_1) в положении максимального отклонения и через m , g и L обозначены масса каждого из тел, ускорение свободного падения и длина нити. Из записанных уравнений находим, что $L = \frac{V_0^2}{4g}$.

Рассмотрим теперь состояние системы с отклонением нити на 60° . Запишем законы сохранения энергии и импульса в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_k^2}{2} + \frac{mV_r^2}{2} + \frac{mV_b^2}{2} + mgL(1 - \cos 60^\circ), \quad mV_0 = mV_k + mV_r,$$

где через V_k обозначена скорость кольца, а через V_r и V_b – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости шарика. Запишем также кинематическую связь – условие равенства скоростей кольца и шарика в проекции на нить:

$$V_k \sin 60^\circ = V_r \sin 60^\circ + V_b \cos 60^\circ.$$

Здесь учтено, что вертикальная скорость шарика направлена вниз при втором прохождении положения с отклонением нити на 60° . Исключая из записанных уравнений, например, V_k и V_b , приходим к квадратному уравнению для V_r :

$$56V_r^2 - 56V_0V_r + 13V_0^2 = 0,$$

откуда получаем

$$V_r = \frac{14 \pm \sqrt{14}}{28} V_0 = \frac{\sqrt{14} \pm 1}{2\sqrt{14}} V_0.$$

Чтобы выбрать правильное значение знака, подставим полученное выражение в формулу для вертикальной компоненты скорости $V_b = \sqrt{3}(2V_r - V_0)$, которая следует из записанных выше уравнений сохранения импульса и кинематической связи. В результате получим

$$V_b = \mp \sqrt{\frac{3}{14}} V_0.$$

Из условия $V_b > 0$ (шарик движется вниз в рассматриваемом положении) следует, что в полученных решениях для V_r и V_b нужно выбрать нижний знак. Таким образом, для компонент скорости окончательно имеем

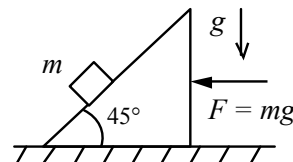
$$V_r = \frac{\sqrt{14}-1}{2\sqrt{14}} V_0, \quad V_b = \sqrt{\frac{3}{14}} V_0.$$

Величина скорости шарика $V_{ш}$ находится как

$$V_{ш} = \sqrt{V_r^2 + V_b^2} = \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{27-2\sqrt{14}}{14}}.$$

11 класс

1. (30 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина пренебрежимо малой массы, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к клину горизонтальную силу $F = mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Найти ускорение клина и силу, с которой клин давит на стол.



Ответ: Ускорение клина равно g и направлено горизонтально в направлении действия силы F . Клин давит на стол с силой mg .

Решение: Сумма сил, действующих на клин пренебрежимо малой массы, должна быть равна нулю, иначе клин получит бесконечное ускорение. Пусть N – сила, с которой брусок давит на клин (перпендикулярно наклонной грани клина вправо-вниз). Тогда из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в горизонтальном направлении, т.е. из равенства

$$N \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

следует, что $N = \sqrt{2}mg$. Из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в вертикальном направлении, следует, что сила со стороны стола на клин равна вертикальной компоненте силы N , т.е. mg . С такой же по величине силой и клин давит на стол.

Чтобы найти ускорение клина, необходимо сначала найти ускорение бруска. Клин действует на брусок с силой, равной по величине $N = \sqrt{2}mg$ и направленной перпендикулярно наклонной грани клина влево-вверх. Вертикальная компонента этой силы равна mg и уравнивает действующую на брусок силу тяжести. Горизонтальная же компонента, также равная mg , сообщает бруску ускорение, равное по величине g и направленное влево. Поскольку ускорение клина также направлено горизонтально и брусок не отрывается от клина, то ускорение клина равно ускорению бруска, т.е. равно g .

2. (40 баллов) Два разноименных точечных заряда, величины которых отличаются в 4 раза, расположены на расстоянии d друг от друга. Найти минимальное расстояние между эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала и точкой с равной нулю напряженностью поля. Потенциал на бесконечности принять равным нулю.

Ответ: Искомое расстояние равно $2d/3$.

Решение: Обозначим заряды через q и $-4q$. Точка с нулевой напряженностью поля ($E = 0$) находится, очевидно, на прямой, проходящей через заряды, с противоположной стороны от заряда q по сравнению с зарядом $-4q$ (см. рис.). При этом расстояния R_1 и R_2 от зарядов q и $-4q$ до этой точки связаны соотношением $R_2 = R_1 + d$. Из условия $E = 0$ следует также, что

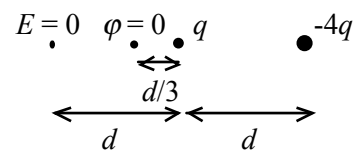
$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} - \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = 0$$

(ϵ_0 - электрическая постоянная), т.е. $R_2 = 2R_1$. В итоге получаем $R_1 = d$.

Найдем теперь ближайшую к точке $E = 0$ точку с $\varphi = 0$. Для этого запишем условие $\varphi = 0$ в виде

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 0,$$

где r_1 и r_2 - расстояния до произвольной точки с нулевым потенциалом от зарядов q и $-4q$. Из данного уравнения получаем, что $r_2 = 4r_1$. Чтобы расстояние между точками $E = 0$ и $\varphi = 0$ было минимальным, точку $\varphi = 0$ нужно брать на прямой, проходящей через заряды, с той же стороны от заряда q , что и точка $E = 0$. В этом случае $r_2 = r_1 + d$, и $r_1 = d/3$. В итоге, расстояние между точками $E = 0$ и $\varphi = 0$ находим как $R_1 - r_1 = 2d/3$.



3. (30 баллов) Два одинаковых пружинных маятника представляют собой лежащие на гладком горизонтальном столе и прикрепленные к стенке пружинами бруски. Колебания маятников возбуждают, сообщив каждому из брусков скорость V_0 в направлении от стенки с задержкой в четверть периода колебаний маятника. Какого максимального значения достигает в процессе колебаний скорость одного бруска относительно другого?

Ответ: Максимальное значение относительной скорости равно $\sqrt{2}V_0$.

Решение: Будем считать, что движение первого бруска начинается в момент $t = 0$. Направим ось x от стенки и запишем скорости брусков в проекции на эту ось в виде

$$V_{1x} = V_0 \cos \omega t, \quad V_{2x} = V_0 \cos \omega \left(t - \frac{T}{4} \right) = \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

где через ω обозначена угловая частота колебаний ($\omega = 2\pi/T$). Относительная скорость брусков равна

$$V_{\text{отн}} = |V_{2x} - V_{1x}| = V_0 \left| \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \omega t \right| = 2V_0 \sin \frac{\pi}{4} \left| \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \sqrt{2}V_0 \left| \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Максимальное значение относительной скорости, очевидно, равно $\sqrt{2}V_0$.