ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2018-2019

Физика, II тур

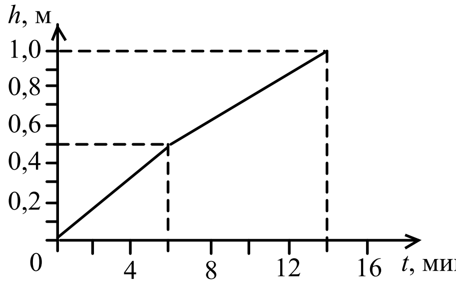
РЕШЕНИЯ

7 класс

1. (30 баллов) Два конькобежца соревновались в беге на 10 км на стадионе с длиной круговой дорожки 400 м. Победитель забега на каждом круге выигрывал у соперника 2 с и пробежал дистанцию за 16 мин 40 сек. Сколько метров дистанции оставалось пробежать проигравшему спортсмену после того, как финишировал победитель?

Ответ: $10000/21 \approx 476$ м.

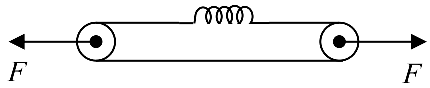
Решение: Дистанция 10 км состоит из 25 кругов. Поскольку на каждом круге проигравший отставал от победителя на 2 сек, его полное отставание по времени составило $25 \cdot 2$ сек = 50 сек, и в итоге он пробежал дистанцию за 16 мин 40 сек + 50 сек = 1050 сек. Скорость проигравшего спортсмена равна 10000/1050 = 200/21 м/с. За 50 сек, на которые отстал спортсмен, он пробежит 200/21 м/с $\cdot$ 50 сек = $10000/21 \approx 476$ м.



2. (30 баллов) При равномерном заполнении доверху водой кубического аквариума, на дне которого лежит камень в виде прямоугольного параллелепипеда, высота уровня воды зависит от времени так, как показано на графике (см. рис.). Найти объем параллелепипеда.

Ответ: 1/8 м^3.

Решение: Из графика видно, что высота параллелепипеда равна 0,5 м, а длина ребра аквариума 1 м. Из графика видно также, что скорость заполнения первых 0,5 м высоты аквариума в (14 - 6)/6 = 4/3 раза больше, чем второй половины высоты. Отсюда следует соотношение 1 м^2/(1 м^2 - S) = 4/3, где S – площадь лежащей на дне аквариума грани параллелепипеда. Из данного соотношения находим, что S = 1/4 м^2 и объем параллелепипеда равен 1/8 м^3.



3. (40 баллов) Концы пружины жесткости k соединены нитью, переброшенной через два блока, которые лежат на гладком горизонтальном столе (см. вид сверху на рис.). В начальном положении пружина недеформирована, нить не провисает. На сколько увеличится расстояние между блоками, если к их центрам приложить противоположно направленные силы величины F.

Ответ: На $F/(4k)$.

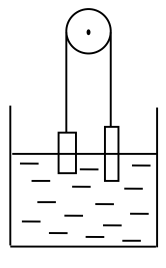
Решение: Из условия равновесия блоков находим, что сила натяжения нити равна $F/2$. Такой же будет и упругая сила пружины. Из закона Гука следует, что удлинение пружины равно $F/(2k)$, поэтому расстояние между блоками увеличится на $F/(4k)$.

8 класс

1. (30 баллов) Два конькобежца соревновались в беге на 10 км на стадионе с длиной круговой дорожки 400 м. Победитель забега на каждом круге выигрывал у соперника 2 с и пробежал дистанцию за 16 мин 40 сек. Сколько метров дистанции оставалось пробежать проигравшему спортсмену после того, как финишировал победитель?

Ответ: $10000/21 \approx 476$ м.

Решение: Дистанция 10 км состоит из 25 кругов. Поскольку на каждом круге проигравший отставал от победителя на 2 сек, его полное отставание по времени составило $25 \cdot 2$ сек = 50 сек, и в итоге он пробежал дистанцию за 16 мин 40 сек + 50 сек = 1050 сек. Скорость проигравшего спортсмена равна 10000/1050 = 200/21 м/с. За 50 сек, на которые отстал спортсмен, он пробежит 200/21 м/с $\cdot$ 50 сек = $10000/21 \approx 476$ м.



2. (40 баллов) Два цилиндра одинаковой массы, сделанные из одного материала и имеющие длины 8 см и 10 см, висят на концах переброшенной через блок идеальной нити. При этом оба цилиндра наполовину погружены в воду (см. рис.). На сколько сместятся цилиндры, если после доливания воды в сосуд ее уровень поднимется на 4 см, на 5 см?

Ответ: На 4/9 см, на 0,5 см.

Решение: Поскольку массы и плотности материала цилиндров одинаковы, то их объемы равны и площади поперечных сечений S_1 и S_2 относятся обратно пропорционально их длинам, т.е. $S_1/S_2 = 5/4$. Для сохранения равновесия при повышении уровня воды необходимо, чтобы погруженные объемы цилиндров были всегда равны (для равенства выталкивающих сил). Вследствие этого короткий цилиндр (с большим сечением) будет смещаться вверх, а длинный – вниз. Обозначим через h повышение уровня воды, а через x смещение короткого цилиндра вверх. Тогда из равенства погруженных объемов следует, что $S_1(h - x) = S_2(h + x)$. Отсюда получаем, что $x = h/9$. Для $h = 4$ см находим, что $x = 4/9$ см. Если $h = 4{,}5$ см, то $x = 0{,}5$ см и уровень воды совпадет с верхними основаниями цилиндров. При дальнейшем повышении уровня воды цилиндры не будут смещаться (формула $x = h/9$ перестает быть применимой), и, следовательно, при $h = 5$ см смещение цилиндров останется равным 0,5 см.

3. (30 баллов) Два тела с одинаковой удельной теплоемкостью, массы которых отличаются в два раза, имеют равные начальные температуры. Тела нагревают двумя разными способами. В одном случае тепло от внешнего источника сообщают телу большей массы, которое затем приводят в тепловой контакт с телом меньшей массы. В другом случае тепло от внешнего источника сообщают телу меньшей массы и это тело приводят в контакт с телом большей массы. Найти отношение количеств тепла, полученных от внешнего источника в двух случаях, если тепло, переданное от одного тела к другому, в обоих случаях было одинаково.

Ответ: Тепло, сообщенное телу большей массы, в 2 раза больше тепла, сообщенного телу меньшей массы.

Решение: Пусть Q_1 – тепло, сообщенное телу большей массы m_1, Q_2 – тепло, сообщенное в другом случае телу меньшей массы m_2, и Q_0 – тепло, переданное от одного тела другому. Тогда условие равенства конечных температур тел в первом случае можно записать в виде $(Q_1 - Q_0)/(cm_1) = Q_0/(cm_2)$, где c – удельная теплоемкость материала тел. Учитывая, что $m_1 = 2m_2$, получаем $Q_1 = 3Q_0$. Во втором случае условие равенства конечных температур тел имеет вид $(Q_2 - Q_0)/(cm_2) = Q_0/(cm_1)$, откуда получаем $Q_2 = 3Q_0/2$. В итоге находим $Q_1/Q_2 = 2$.

9 класс

1. (40 баллов) Тело, брошенное под углом к горизонту в момент $t = 0$ с начальной скоростью V_0, находилось на одинаковом удалении от точки броска в моменты t_1 и t_2. Найти время полета тела. При каком условии на угол между начальной скоростью и горизонтом одинаковое удаление от точки броска достигается в ходе полета не один раз? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ: Время полета равно $t_п = \frac{t_1+t_2}{t_1^2+t_1t_2+t_2^2}\left(\frac{2V_0^2}{g^2}+\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)\right)$. Угол броска α должен удовлетворять условию $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Решение: Удаление ℓ тела от точки броска зависит от времени t по закону

$$\ell(t) = \sqrt{(V_0\cos\alpha t)^2 + (V_0\sin\alpha t - gt^2/2)^2} = \sqrt{V_0^2t^2 - gV_0\sin\alpha t^3 + g^2t^4/4}\,,$$

где α - угол броска (угол между начальной скоростью и горизонтом). Приравнивая удаления в моменты времени t_1 и t_2, находим время полета

$$t_п = \frac{2V_0\sin\alpha}{g} = \frac{t_1+t_2}{t_1^2+t_1t_2+t_2^2}\left(\frac{2V_0^2}{g^2}+\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)\right).$$

Полагая $t_1 = t_2 = t_0$, из предыдущей формулы получаем

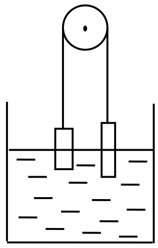
$$\sin\alpha = \frac{2V_0}{3gt_0} + \frac{gt_0}{3V_0} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}V_0}{gt_0} + \frac{gt_0}{\sqrt{2}V_0}\right).$$

В скобке находится сумма взаимообратных положительных величин, поэтому минимальное значение скобки равно 2, а минимальное значение $\sin\alpha$ равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. (30 баллов) При поочередном подключении двух вольтметров к одному и тому же источнику напряжения стрелка одного отклонилась на полную шкалу, а другого – на треть шкалы. При подключении к тому же источнику этих вольтметров, соединенных последовательно, стрелка одного из них отклонилась на треть шкалы. На какую часть шкалы отклонилась стрелка другого вольтметра?

Ответ: На 2/9 шкалы.

Решение: Во втором случае на треть шкалы отклоняется стрелка того вольтметра, стрелка которого в первом случае отклонилась на полную шкалу. Отсюда следует, что напряжение на этом вольтметре составляет треть от напряжения источника. Тогда на другом вольтметре напряжение равно 2/3 от напряжения источника. Поэтому стрелка этого вольтметра отклоняется на 2/3 отклонения в первом случае, т.е. на 2/9 шкалы.



3. (30 баллов) Два цилиндра одинаковой массы, сделанные из одного материала и имеющие длины 8 см и 10 см, висят на концах переброшенной через блок идеальной нити. При этом оба цилиндра наполовину погружены в воду (см. рис.). На сколько сместятся цилиндры, если после доливания воды в сосуд ее уровень поднимется на 4 см, на 5 см?

Ответ: На 4/9 см, на 0,5 см.

Решение: Поскольку массы и плотности материала цилиндров одинаковы, то их объемы равны и площади поперечных сечений S_1 и S_2 относятся обратно пропорционально их длинам, т.е. $S_1/S_2 = 5/4$. Для сохранения равновесия при повышении уровня воды необходимо, чтобы погруженные объемы цилиндров были всегда равны (для равенства выталкивающих сил). Вследствие этого короткий цилиндр (с большим сечением) будет смещаться вверх, а длинный – вниз. Обозначим через h повышение уровня воды, а через x смещение короткого цилиндра вверх. Тогда из равенства погруженных объемов следует, что $S_1(h - x) = S_2(h + x)$. Отсюда получаем, что $x = h/9$. Для $h = 4$ см находим, что $x = 4/9$ см. Если $h = 4{,}5$ см, то $x = 0{,}5$ см и уровень воды совпадет с верхними основаниями цилиндров. При дальнейшем повышении уровня воды цилиндры не будут смещаться (формула $x = h/9$ перестает быть применимой), и, следовательно, при $h = 5$ см смещение цилиндров останется равным 0,5 см.

10 класс

1. (25 баллов) Тело, брошенное под углом к горизонту в момент $t = 0$ с начальной скоростью V_0, в моменты t_1 и t_2 находилось на одинаковом удалении от точки броска. Найти время полета тела. При каком условии на угол между начальной скоростью и горизонтом одинаковое удаление от точки броска достигается в ходе полета не один раз? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ: Время полета равно $t_п = \frac{t_1+t_2}{t_1^2+t_1t_2+t_2^2}\left(\frac{2V_0^2}{g^2}+\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)\right)$. Угол броска α должен удовлетворять условию $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Решение: Удаление ℓ тела от точки броска зависит от времени t по закону

$$\ell(t) = \sqrt{(V_0\cos\alpha t)^2 + (V_0\sin\alpha t - gt^2/2)^2} = \sqrt{V_0^2t^2 - gV_0\sin\alpha t^3 + g^2t^4/4},$$

где α - угол броска (угол между начальной скоростью и горизонтом). Приравнивая удаления в моменты времени t_1 и t_2, находим время полета

$$t_п = \frac{2V_0\sin\alpha}{g} = \frac{t_1+t_2}{t_1^2+t_1t_2+t_2^2}\left(\frac{2V_0^2}{g^2}+\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)\right).$$

Полагая $t_1 = t_2 = t_0$, из предыдущей формулы получаем

$$\sin\alpha = \frac{2V_0}{3gt_0} + \frac{gt_0}{3V_0} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}V_0}{gt_0} + \frac{gt_0}{\sqrt{2}V_0}\right).$$

В скобке находится сумма взаимообратных положительных величин, поэтому минимальное значение скобки равно 2, а минимальное значение $\sin\alpha$ равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. (25 баллов) Падающий вертикально шарик абсолютно упруго соударяется с гладкой наклонной гранью клина, лежащего на гладком горизонтальном столе. Массы шарика и клина равны. При каком угле при основании клина приобретенная клином кинетическая энергия составит наибольшую долю от кинетической энергии, которая была у шарика перед его ударом о клин? Считать, что удар шарика не вызывает вращения клина.

Ответ: Искомый угол α определяется соотношением $\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{2}$.

Решение: Выберем ось y вертикально вниз, а ось x горизонтально, в сторону уклона клина. Обозначив скорость шарика перед ударом через V_0, запишем условие сохранения кинетической энергии при абсолютно упругом соударении шарика и клина

$$V_0^2 = V_x^2 + V_y^2 + u^2,$$

где V_x, V_y – компоненты скорости шарика после удара, а u – величина скорости клина (учтено равенство масс шарика и клина). Из сохранения проекции импульса на ось x следует, что

$$V_x = u.$$

Поскольку поверхность клина гладкая, сохраняется проекция скорости шарика на ось, параллельную наклонной грани клина, т.е.

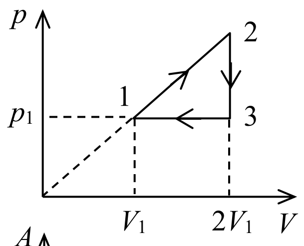
$$V_0\sin\alpha = V_y\sin\alpha + V_x\cos\alpha.$$

Исключая из записанных соотношений V_x и V_y, получаем

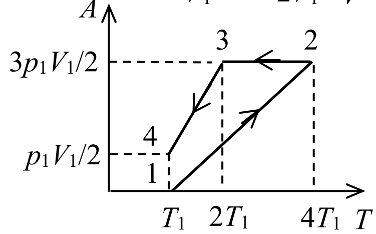
$$u = \frac{\sqrt{2}V_0}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\alpha}+\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{2}}\right)}.$$

В знаменателе стоит сумма положительных взаимообратных величин, поэтому при фиксированном V_0 дробь, а значит и u, достигают максимума при $\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\alpha} = 1$, т.е. при $\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{2}$.

3. (25 баллов) Один моль идеального газа совершает циклический процесс (см. рис.) с заданными значениями p_1, V_1 и $V_2 = 2V_1$. Изобразить данный процесс, откладывая по оси абсцисс температуру газа, а по оси ординат – совершенную газом работу. Молярную газовую постоянную R считать известной.

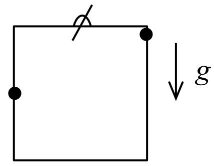


Ответ См. рисунок, где $T_1 = p_1V_1/R$.



Решение: На участке 1-2 работа вычисляется как площадь трапеции $A = \frac{p_1+p}{2}(V - V_1) = \frac{R}{2}(T - T_1)$, т.е. график на этом участке – отрезок наклонной прямой. На участке 2-3 работа равна нулю, график – отрезок горизонтальной прямой. На участке 3-4 работа записывается как $A = p_1(V - 2V_1) = R(T - 2T_1)$, т.е. график – отрезок наклонной прямой.

4. (25 баллов) Жесткий проволочный квадрат пренебрежимо малой массы может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через дужку, прикрепленную к середине стороны квадрата. Две тяжелые бусинки массой m каждая закреплены на квадрате – одна на середине стороны, другая – около вершины квадрата (см. рис.). В некоторый момент бусинку, находящуюся около вершины, освобождают, и она начинает скользить по проволоке без трения. Найти силы, с которыми проволока действует на бусинки сразу после освобождения одной из них. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ: Сила на закрепленную бусинку равна $mg\frac{\sqrt{2}}{2}$. Сила на освобожденную бусинку равна нулю.

Решение: Сразу после освобождения бусинки проволочный квадрат начинает поворачиваться с некоторым угловым ускорением против часовой стрелки. При этом линейное ускорение проволоки в месте нахождения освобожденной бусинки будет направлено вертикально вверх, так что на эту бусинку проволока действовать не будет. Закрепленная бусинка будет двигаться по окружности с центром на оси вращения квадрата. В начальный момент, когда скорость бусинки близка к нулю, ее ускорение чисто тангенциальное и направлено перпендикулярно прямой, проходящей через бусинку и ось вращения. Это ускорение создается только проекцией силы тяжести на тангенциальное направление. Проекция же силы со стороны квадрата на это направление равна нулю (в начальный момент), иначе на проволочный квадрат нулевой массы подействовал бы не равный нулю момент сил (освобожденная бусинка не взаимодействует с квадратом в начальный момент). Записывая условие баланса сил в проекции на направление к центру окружности, находим, что сила со стороны проволоки равна проекции силы тяжести на это направление, т.е. $mg\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11 класс

1. (25 баллов) При каких значениях угла между начальной скоростью и горизонтом брошенное тело будет удаляться от точки броска в течение всего полета?

Ответ: При углах α, удовлетворяющих условию $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Решение: Квадрат удаления ℓ брошенного тела от точки броска зависит от времени t по закону

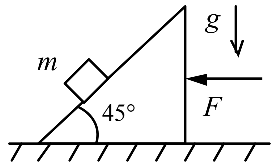
$$\ell^2(t) = (V_0\cos\alpha t)^2 + (V_0\sin\alpha t - gt^2/2)^2 = V_0^2t^2 - gV_0\sin\alpha t^3 + g^2t^4/4\,.$$

Если удаление меняется со временем немонотонно (тело сначала удаляется, затем приближается, затем снова удаляется), то функция $\ell(t)$ (и $\ell^2(t)$) имеет две точки экстремумов (максимум и минимум). В этих двух точках (в эти два момента времени) производная $\ell^2(t)$ по времени обращается в нуль. Приравнивая к нулю эту производную, получаем уравнение

$$g^2t^2 - 3gV_0\sin\alpha t + 2V_0^2 = 0.$$

Отсутствие действительных решений данного уравнения (отрицательность дискриминанта $D = 9g^2V_0^2\sin^2\alpha - 8\,g^2V_0^2$) означает отсутствие экстремумов, т.е. непрерывное удаление тела от точки броска в течение всего полета. Из условия $D < 0$ находим, что $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. (25 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина пренебрежимо малой массы, расположенного на гладком горизонтальном столе. Какую горизонтальную силу F следует приложить к клину (см. рис.), чтобы ускорение бруска было направлено под углом 30° к вертикали? Угол при основании клина 45°, ускорение свободного падения равно g.



Ответ: $F = \frac{mg}{1+\sqrt{3}}$.

Решение: Из невесомости клина следует, что горизонтальная проекция силы N нормального давления бруска на клин равна силе F. Отсюда находим, что $N = \sqrt{2}F$. Такая же сила действует на брусок со стороны клина. Записывая второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось, перпендикулярную к ускорению бруска, получаем

$$0 = N\cos 15° - mg\cos 60°.$$

Из двух соотношений находим

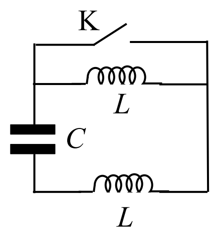
$$F = \frac{mg}{2\sqrt{2}\cos 15°} = \frac{mg}{1+\sqrt{3}}.$$

3. (25 баллов) Положительный точечный заряд q находится на некотором расстоянии от равномерно заряженной плоскости с отрицательной поверхностной плотностью заряда -σ. При каких расстояниях между зарядом и плоскостью электрическое поле будет равно нулю в двух точках? При каком расстоянии между зарядом и плоскостью разность потенциалов между точками с нулевым полем будет максимальной? Поле плоскости равно по величине $\sigma/(2\varepsilon_0)$, где ε_0 – электрическая постоянная.

Ответ: Поле будет равно нулю в двух точках, если расстояние от заряда до плоскости меньше $\sqrt{q/(2\pi\sigma)}$. Разность потенциалов максимальна при расстоянии, равном $\sqrt{q/(2\pi\sigma)}$.

Решение: Две точки с нулевым полем могут находиться только по разные стороны от плоскости. В полупространстве с той стороны от плоскости, где находится заряд, точка с нулевым полем существует при любом расстоянии между зарядом и плоскостью, т.к. поле плоскости постоянно, а поле заряда принимает все значения от нуля до бесконечности. Чтобы точка с нулевым полем существовала и в полупространстве, где нет точечного заряда (с другой стороны от плоскости), поле заряда должно превышать поле плоскости в некоторой области. Для этого необходимо, чтобы расстояние между зарядом и плоскостью было меньше $\sqrt{q/(2\pi\sigma)}$. Разность потенциалов между точками с нулевым полем достигает максимального значения $\frac{1}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q\sigma}{2\pi}}$, когда одна из точек находится бесконечно близко к плоскости.

4. (25 баллов) В колебательном контуре с двумя одинаковыми катушками индуктивности L и конденсатором емкости C (см. рис.) происходят колебания с амплитудой тока I_0. В момент, когда ток максимален, одна из катушек замыкается ключом К накоротко. Через какое время после замыкания ток через ключ достигнет максимального значения? Чему равно это максимальное значение? Считать, что магнитное поле одной катушки не пронизывает другую.



Ответ: Через время $\pi\sqrt{LC}$. Максимальное значение тока равно $2I_0$.

Решение: После замыкания ключа ток в закороченной катушке меняться не будет и останется равным I_0. Действительно, в случае его изменения на концах катушки возникало бы напряжение, что приводило бы к бесконечному току через ключ. Таким образом, процессы в цепи после замыкания ключа можно представить следующим образом. В контуре из верхней катушки и ключа против часовой стрелки циркулирует постоянный ток I_0, а в контуре из нижней катушки, конденсатора и ключа циркулирует переменный ток с периодом $2\pi\sqrt{LC}$ и амплитудой I_0. В первый момент после замыкания этот ток идет по часовой стрелке и равен I_0. Ток через ключ является суммой этих постоянного и переменного токов. В начальный момент токи через ключ идут навстречу друг другу и их сумма равна нулю. Через полпериода (через время $\pi\sqrt{LC}$) эти токи станут сонаправленными, их сумма будет равна $2I_0$.