Школьные Харитоновские чтения 2021. Математика

1. **(15 баллов)** В геометрической прогрессии, состоящей из семи членов, сумма первых трех членов равна 0,875, а сумма последних трех равна 14. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

   Решение. Обозначим первый член прогрессии через b_1, а знаменатель через q. Тогда

   $$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = \dfrac{7}{8}, \\ b_1q^4 + b_1q^5 + b_1q^6 = 14. \end{cases}$$

   Разделив второе равенство системы на первое, находим, что $q^4 = 16$, откуда $q = \pm 2$.

   Если $q = 2$, то $b_1 = \dfrac{1}{8}$.

   Если $q = -2$, то $b_1 = \dfrac{7}{24}$.

   Ответ: $b_1 = \dfrac{1}{8}$, $q = 2$ или $b_1 = \dfrac{7}{24}$, $q = -2$.

2. **(15 баллов)** Решите неравенство

   $$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

   Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

   $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8-2x-x^2 = 0, \\ x+10 \neq 0, \\ 2x+9 \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 8-2x-x^2 > 0, \\ \dfrac{1}{x+10} \le \dfrac{1}{2x+9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=2, \end{array}\right. \\ \begin{cases} -4 < x < 2, \\ \dfrac{x-1}{(x+10)(2x+9)} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=2, \\ -4 < x \le 1. \end{array}\right.$$

   Ответ: $x \in [-4;\ -1] \cup \{2\}$.

3. **(20 баллов)** Найдите все положительные значения a, при каждом из которых наибольшее из чисел $b = a^6 - 5a^3 + 2$ и $c = a^{-4}(2a^{-2} + a) - 1$ меньше 2.

   Решение. «Наибольшее из чисел меньше двух» $\Leftrightarrow$ «оба числа меньше двух». Итак, требуется найти все положительные решения системы

   $$\begin{cases} a^6 - 5a^3 + 2 < 2, \\ a^{-4}(2a^{-2} + a) - 1 < 2. \end{cases}$$

   Решаем первое неравенство:

   $$a^6 - 5a^3 + 2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^3(a^3 - 5) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a^3 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < \sqrt[3]{5}.$$

   Решаем второе неравенство:

   $$2a^{-6} + a^{-3} - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^{-3} - 1)(2a^{-3} + 3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} < a^{-3} < 1.$$

   По условию $a > 0$, поэтому $\dfrac{1}{a^3} < 1$, $a > 1$.

   В итоге получаем $a \in (1;\ \sqrt[3]{5})$.

   Ответ: $a \in (1;\ \sqrt[3]{5})$.

4. **(15 баллов)** В треугольник вписана окружность радиуса 2. Одна из сторон треугольника делится точкой касания на отрезки 7 и 2. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Пусть $AP = AR = x$. Тогда по формуле Герона площадь S треугольника ABC равна $\sqrt{(x+9) \cdot x \cdot 7 \cdot 2}$.

С другой стороны, площадь треугольника равна полупериметру, умноженному на радиус вписанной окружности, т.е. $S = 2(x+9)$. Получаем уравнение $2(x+9) = \sqrt{14x(x+9)}$, решая которое, находим, что $x = \dfrac{18}{5}$.

Тогда площадь треугольника равна $2 \cdot \left(\dfrac{18}{5} + 9\right) = \dfrac{126}{5}$.

Радиус описанной окружности равен $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{9 \cdot \dfrac{28}{5} \cdot \dfrac{53}{5}}{4 \cdot \dfrac{126}{5}} = \dfrac{53}{10} = 5{,}3$.

Ответ: 5,3.

5. **(20 баллов)** В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, у которого $\angle BAC = 120°$. Площадь полной поверхности призмы равна $\frac{225\sqrt{3}}{2}$, а площади граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 равны $21\sqrt{3}$ и $49\sqrt{3}$ соответственно. Найдите объем тетраэдра $CABB_1$.

Решение. Площади граней AA_1B_1B и BB_1C_1C относятся как длины ребер AB и BC, поэтому $AB : BC = 3 : 7$. Пусть $AB = 3x$, $BC = 7x$. По теореме косинусов для треугольника ABC получаем $AC^2 + 9x^2 - 2\,AC \cdot 3x \cdot \cos 120° = 49x^2$, откуда находим, что $AC = 5x$.

Значит, $S_{ACC_1A_1} = \frac{5}{3} S_{ABB_1A_1} = \frac{5}{3} 21\sqrt{3} = 35\sqrt{3}$.

Тогда площадь основания $= \frac{1}{2}\left(\frac{225}{2}\sqrt{3} - 21\sqrt{3} - 49\sqrt{3} - 35\sqrt{3}\right) = \frac{15}{4}\sqrt{3}$.

По формуле площади треугольника получаем уравнение:

$$\frac{15}{4}\sqrt{3} = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} 15x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда $x = 1$. Тогда $AA_1 = \frac{S_{AA_1B_1B}}{AB} = \frac{21\sqrt{3}}{AB} = 21\sqrt{3}3 = 7\sqrt{3}$; объем призмы: $V = S_{.} \cdot AA_1 = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 7\sqrt{3} = \frac{315}{4}$.

Ответ: $\frac{315}{4}$.

6. **(15 баллов)** На трех лугах площадью $\frac{10}{3}$, 10 и 24 га трава растет одинаково, т. е. с одинаковой густотой и с одним и тем же приростом. После того как на первом лугу 12 коров паслись 4 недели, а на втором лугу 21 корова паслась 9 недель, трава оказалась съеденной настолько, что оба пастбища пришлось забросить. Сколько коров можно пасти на третьем лугу в течение 18 недель?

Решение. Пусть за 1 неделю на 1 гектаре вырастает x травы, изначально на 1 гектаре было y травы, а одна корова съедает z травы в неделю. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{10}{3}(y + 4x) = 12 \cdot 4z, \\ 10(y + 9x) = 21 \cdot 9z, \end{cases}$$

откуда $x = 0{,}9\,z$; $y = 10{,}8\,z$. Значит, на третьем лугу за 18 недель будет $24(y + 18x) = 24(10{,}8\,z + 18 \cdot 0{,}9\,z) = 24 \cdot 27\,z$ травы.

Этой травы хватит на $\dfrac{24 \cdot 27z}{18} = 36$ коров.

Ответ: 36 коров.