ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2021-2022
Физика, II тур

11 класс

1. (25 баллов) Тело бросили под углом к горизонту в момент $t = 0$ так, что вектор скорости составил с горизонтом угол 45° в моменты времени t_1 и t_2. Найти дальность полета тела. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Дальность полета равна $\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2)$.

Решение. Запишем проекции скорости тела на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси в виде

$$V_x = V_0 \cos\alpha, \quad V_y = V_0 \sin\alpha - gt\ ,$$

где V_0 – начальная скорость тела, а α – угол, под которым тело было брошено. В момент t_1 выполняется условие $V_y = V_x$, т.е.

$$V_0 \sin\alpha - gt_1 = V_0 \cos\alpha,$$

а в момент t_2 – условие $V_y = -V_x$, т.е.

$$V_0 \sin\alpha - gt_2 = -V_0 \cos\alpha.$$

Складывая записанные уравнения, получаем

$$2V_0 \sin\alpha = g(t_2 + t_1),$$

а вычитая одно из другого, получаем

$$2V_0 \cos\alpha = g(t_2 - t_1).$$

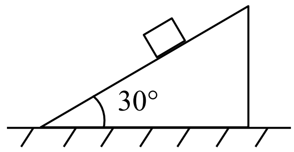
Перемножая полученные формулы, приходим к соотношению

$$V_0^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2}g^2(t_2^2 - t_1^2),$$

подставляя которое в формулу для дальности полета $L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, окончательно получаем

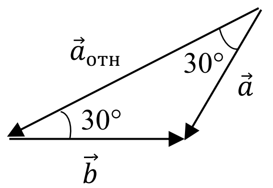
$$L = \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2).$$

2. (25 баллов) На гладкую наклонную грань клина, находящегося на гладком горизонтальном столе, положили брусок (см. рис.). При каком соотношении масс бруска и клина ускорения этих тел будут равны по величине? Угол при основании клина равен 30°.



Ответ. Масса бруска в 2 раза больше массы клина.

Решение. Ускорение бруска $\vec{a}$ можно представить в виде векторной суммы его ускорения относительно клина $\vec{a}_{\text{отн}}$, направленного вдоль наклонной грани клина вниз, и ускорения клина $\vec{b}$, направленного горизонтально (см. рис). Из условия $a = b$ следует, что треугольник ускорений равнобедренный и, следовательно, углы при стороне $\vec{a}_{\text{отн}}$ равны и составляют 30°. Отсюда находим, что вектор $\vec{a}$ направлен под углом 60° к горизонтальной плоскости стола, а его проекция на эту плоскость равна



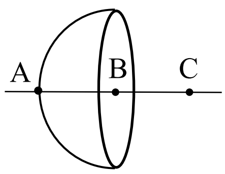
$$a_{\text{гор}} = a\cos 60° = a/2 = b/2.$$

Учтем далее, что в силу сохранения горизонтальной проекции импульса системы «брусок-клин» выполняется соотношение

$$ma_{\text{гор}} = Mb,$$

где m – масса бруска, а M – масса клина. С учетом предыдущей формулы получаем $m/M = 2$.

3. (25 баллов) Точки A, B, C находятся на оси симметрии равномерно заряженной полусферы (см. рис.). Точка A находится на поверхности полусферы, точка B в центре, точка C на расстоянии радиуса полусферы от точки B. Помещенная вблизи точки A заряженная частица разгоняется электрическим полем полусферы и проходит точку B со скоростью V_{B}. Какой будет скорость частицы в точке C?



Ответ. Скорость будет равна $\sqrt{2}V_{\text{B}}$.

Решение. По закону сохранения энергии скорость заряда V_{B} связана с разностью потенциалов $\varphi_{\text{A}} - \varphi_{\text{B}}$ между точками A и B соотношением

$$\frac{mV_{\text{B}}^2}{2} = q(\varphi_{\text{A}} - \varphi_{\text{B}}),$$

где q и m – заряд и масса частицы. Скорость V_{C} в точке С определяется аналогичным соотношением

$$\frac{mV_{\text{C}}^2}{2} = \frac{mV_{\text{B}}^2}{2} + q(\varphi_{\text{B}} - \varphi_{\text{C}}) = q(\varphi_{\text{A}} - \varphi_{\text{B}}) + q(\varphi_{\text{B}} - \varphi_{\text{C}}),$$

где через φ_{C} обозначен потенциал в точке С. Если дополнить полусферу до сферы, то в силу принципа суперпозиции потенциал в центре сферы будет равен $2\varphi_{\text{B}}$. Поскольку объем внутри сферы является эквипотенциальным (поле внутри сферы равно нулю), то потенциал в точке А будет также равен $2\varphi_{\text{B}}$ и будет складываться из потенциала φ_{A}, создаваемого в этой точке левой полусферой и потенциала, создаваемого правой (добавленной) полусферой. Вклад правой полусферы в силу симметрии равен, очевидно, потенциалу, создаваемому левой полусферой в точке С, т.е. φ_{C}. Таким образом, получаем соотношение

$$2\varphi_{\text{B}} = \varphi_{\text{A}} + \varphi_{\text{C}}.$$

Отсюда следует, что $\varphi_{\text{B}} - \varphi_{\text{C}} = \varphi_{\text{A}} - \varphi_{\text{B}}$. Возвращаясь к уравнениям для V_{B} и V_{C}, получаем соотношение

$$\frac{mV_{\text{C}}^2}{2} = 2\frac{mV_{\text{B}}^2}{2},$$

откуда окончательно находим, что $V_{\text{C}} = \sqrt{2}V_{\text{B}}$.

4. (25 баллов) К вбитому в стену гвоздю привязали на нитях длиной L два груза так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания в одной параллельной стене плоскости. Для возбуждения колебаний один маятник отклонили на небольшой угол θ_0 от вертикали и отпустили, а другой в этот момент толкнули навстречу первому с некоторой скоростью. Какой была эта скорость, если столкновение маятников произошло при угле $\theta_0/2$? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Скорость была равна $\theta_0\sqrt{gL/3}$.

Решение. Зависимость от времени углов отклонения маятников от вертикали можно записать в виде

$$\theta_1 = \theta_0 \cos\omega t, \qquad \theta_2 = \theta_{\max} \sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ – угловая частота колебаний маятников, а через $\theta_{\max}$ обозначена неизвестная амплитуда колебаний второго маятника. Приравнивая θ_1 к $\theta_0/2$, находим, что в момент столкновения маятников $\omega t = \frac{\pi}{3}$. Приравнивая θ_2 к $\theta_0/2$ и используя $\omega t = \frac{\pi}{3}$, находим амплитуду $\theta_{\max} = \theta_0/\sqrt{3}$. Угловая скорость маятника равна производной по времени от угла, т.е. $\Omega_2 = \omega\theta_{\max}\cos\omega t$. В начальный момент $\Omega_2(0) = \omega\theta_{\max}$, так что линейная скорость второго маятника в этот момент равна $V(0) = \Omega_2(0)L = \omega\theta_{\max}L = \omega L\theta_0/\sqrt{3} = \theta_0\sqrt{gL/3}$.

10 класс

1. (25 баллов) Тело бросили под углом к горизонту в момент $t = 0$ так, что вектор скорости составил с горизонтом угол 45° в моменты времени t_1 и t_2. Найти дальность полета тела. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Дальность полета равна $\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2)$.

Решение. Запишем проекции скорости тела на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси в виде

$$V_x = V_0\cos\alpha, \;\; V_y = V_0\sin\alpha - gt\,,$$

где V_0 – начальная скорость тела, а α – угол, под которым тело было брошено. В момент t_1 выполняется условие $V_y = V_x$, т.е.

$$V_0\sin\alpha - gt_1 = V_0\cos\alpha,$$

а в момент t_2 – условие $V_y = -V_x$, т.е.

$$V_0\sin\alpha - gt_2 = -V_0\cos\alpha.$$

Складывая записанные уравнения, получаем

$$2V_0\sin\alpha = g(t_2 + t_1),$$

а вычитая одно из другого, получаем

$$2V_0\cos\alpha = g(t_2 - t_1).$$

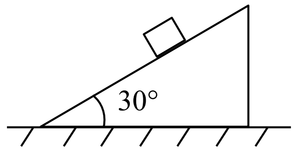
Перемножая полученные формулы, приходим к соотношению

$$V_0^2\sin 2\alpha = \frac{1}{2}g^2(t_2^2 - t_1^2),$$

подставляя которое в формулу для дальности полета $L = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}$, окончательно получаем

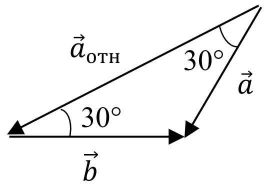
$$L = \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2).$$

2. (25 баллов) На гладкую наклонную грань клина, находящегося на гладком горизонтальном столе, положили брусок (см. рис.). При каком соотношении масс бруска и клина ускорения этих тел будут равны по величине? Угол при основании клина равен 30°.



Ответ. Масса бруска в 2 раза больше массы клина.

Решение. Ускорение бруска $\vec{a}$ можно представить в виде векторной суммы его ускорения относительно клина $\vec{a}_{\text{отн}}$, направленного вдоль наклонной грани клина вниз, и ускорения клина $\vec{b}$, направленного горизонтально (см. рис). Из условия $a = b$ следует, что треугольник ускорений равнобедренный и, следовательно, углы при стороне $\vec{a}_{\text{отн}}$ равны и составляют 30°. Отсюда находим, что вектор $\vec{a}$ направлен под углом 60° к горизонтальной плоскости стола, а его проекция на эту плоскость равна



$$a_{\text{гор}} = a\cos 60° = a/2 = b/2.$$

Учтем далее, что в силу сохранения горизонтальной проекции импульса системы «брусок-клин» выполняется соотношение

$$ma_{\text{гор}} = Mb,$$

где m – масса бруска, а M – масса клина. С учетом предыдущей формулы получаем $m/M = 2$.

3. (25 баллов) В ходе некоторого процесса с одним молем идеального одноатомного газа его температура T возрастает от T_1 до T_2, а теплоемкость газа изменяется по закону $C = RT/T_1$, где R – молярная газовая постоянная. Чему равно отношение T_2/T_1, если совершенная газом за весь процесс работа равна нулю? Какое количество теплоты нужно отвести от газа при новом положении сосуда, чтобы газ вернулся к первоначальному объему?

Ответ. $T_2/T_1 = 2$.

Решение. Поскольку теплоемкость меняется с температурой линейно, для расчета полученного газом тепла можно использовать ее среднее значение

$$C_{\text{ср}} = R\frac{T_1 + T_2}{2T_1}.$$

Записываем полученное тепло как

$$Q = C_{\text{ср}}(T_2 - T_1) = R\frac{T_1 + T_2}{2T_1}(T_2 - T_1)$$

(эту формулу можно также получить через площадь под графиком $C(T)$) и приравниваем его к изменению внутренней энергии газа

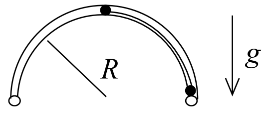
$$\Delta U = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1).$$

Уравнение $Q = \Delta U$ сводится к соотношению

$$\frac{T_1 + T_2}{2T_1} = \frac{3}{2}$$

откуда находим $T_2/T_1 = 2$.

4. (25 баллов) Тонкая трубка согнута в виде полуокружности радиуса R и расположена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке. В трубке удерживаются два связанных нитью шарика равной массы – один в верхней части трубки, другой у ее среза. Какими будут скорости и ускорения шариков после их освобождения в момент, когда две третьих длины нити окажутся вне трубки? Ускорение свободного падения равно g. Трение отсутствует.



Ответ. Шарики будут иметь скорость $\sqrt{gR\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}$. Ускорение нижнего шарика будет равно $\frac{g}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а верхнего $\frac{g}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

Решение. Поскольку шарики связаны нитью, их скорости будут равны по величине. Для нахождения величины скорости V в указанный в условии момент времени запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{2mV^2}{2} = mg\frac{R}{2} + mg\frac{\pi R}{3},$$

где через m обозначена масса шарика и учтено, что нижний шарик опустится на высоту $\frac{2}{3}\frac{\pi R}{2} = \frac{\pi R}{3}$ ($\frac{\pi R}{2}$ – длина нити), а верхний – пройдет 2/3 четверти окружности (длине пройденной дуги соответствует угол $\frac{\pi}{3}$) и опустится на высоту $R\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = R/2$. Из записанного уравнения находим, что $V = \sqrt{gR\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}$.

Зная скорость V, находим центростремительное (нормальное) ускорение верхнего шарика

$$a_{1n} = \frac{V^2}{R} = g\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Чтобы найти тангенциальное (вдоль трубки) ускорение верхнего шарика и ускорение двигающегося по прямой нижнего шарика, запишем II закон Ньютона для верхнего шарика в проекции на тангенциальное направление

$$ma_{1\tau} = mg\sin\frac{\pi}{3} + T$$

и для нижнего шарика в проекции на вертикальное направление

$$ma_2 = mg - T,$$

где через T обозначена сила натяжения нити. Учитывая, что $a_{1\tau} = a_2$, из записанных уравнений находим

$$a_{1\tau} = a_2 = \frac{g}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Полное ускорение верхнего шарика находим как

$$a_1 = \sqrt{a_{1n}^2 + a_{1\tau}^2} = \frac{g}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

9 класс

1. (25 баллов) Тело бросили под углом к горизонту в момент $t = 0$ так, что вектор скорости составил с горизонтом угол 45° в моменты времени t_1 и t_2. Найти дальность полета тела. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Дальность полета равна $\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2)$.

Решение. Запишем проекции скорости тела на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси в виде

$$V_x = V_0\cos\alpha, \quad V_y = V_0\sin\alpha - gt\,,$$

где V_0 – начальная скорость тела, а α – угол, под которым тело было брошено. В момент t_1 выполняется условие $V_y = V_x$, т.е.

$$V_0\sin\alpha - gt_1 = V_0\cos\alpha,$$

а в момент t_2 – условие $V_y = -V_x$, т.е.

$$V_0\sin\alpha - gt_2 = -V_0\cos\alpha.$$

Складывая записанные уравнения, получаем

$$2V_0\sin\alpha = g(t_2 + t_1),$$

а вычитая одно из другого, получаем

$$2V_0\cos\alpha = g(t_2 - t_1).$$

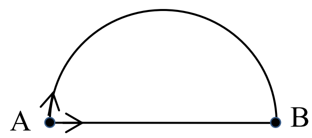
Перемножая полученные формулы, приходим к соотношению

$$V_0^2\sin2\alpha = \frac{1}{2}g^2(t_2^2 - t_1^2),$$

подставляя которое в формулу для дальности полета $L = \frac{V_0^2\sin2\alpha}{g}$, окончательно получаем

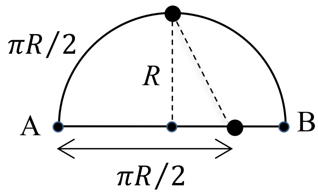
$$L = \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2).$$

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают бежать с равными скоростями из точки A в точку B: один по прямой, другой по полуокружности радиуса R (см. рис.). Каким будет максимальное расстояние между жучками?



Ответ. Максимальное расстояние равно $R\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2} \approx 1{,}15R$.

Решение. Расстояние между жучками достигает максимума в тот момент, когда векторы скоростей жучков оказываются параллельными, т.е. когда бегущий по полуокружности жучок проходит ее половину. Действительно, в этот момент жучки движутся в одном направлении с одинаковой скоростью, т.е. расстояние между ними на мгновение перестает меняться, тогда как до этого оно увеличивалось. Далее жучки начинают сближаться. Расстояние L между жучками в указанный момент находим как гипотенузу прямоугольного треугольника (см. рис.)



$$L = R\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2} \approx 1{,}15R.$$

3. (25 баллов) Один шар массы m равномерно всплывает в вязкой жидкости, а другой, имеющий равный с ним радиус и массу $2m$, равномерно погружается в этой жидкости с той же скоростью. Какой будет сила натяжения нити, если скрепить ею шары и поместить их в ту же жидкость? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Сила натяжения нити будет равна $mg/2$.

Решение. Запишем условие баланса сил для равномерно всплывающего шара

$$F_{\text{А}} = mg + F_{\text{сопр}}$$

и равномерно погружающегося

$$2mg = F_{\text{А}} + F_{\text{сопр}}.$$

Здесь через $F_{\text{А}}$ и $F_{\text{сопр}}$ обозначены сила Архимеда и сила сопротивления, одинаковые для обоих шаров в силу равенства их радиусов и скоростей. Исключая из записанных уравнений $F_{\text{сопр}}$, находим

$$F_{\text{А}} = \frac{3}{2}mg.$$

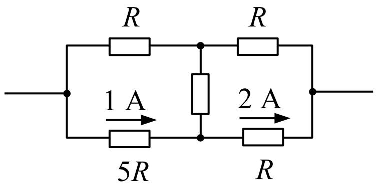
Нетрудно видеть, что для скрепленных нитью шаров полная сила тяжести $3mg$ будет в точности компенсироваться суммарной силой Архимеда $2F_{\text{А}} = 3mg$. Это означает, что скрепленные шары будут неподвижно висеть в жидкости: легкий сверху, тяжелый снизу. Чтобы найти силу натяжения нити, запишем условие баланса сил для одного из шаров, например, верхнего (легкого)

$$F_{\text{А}} = mg + T.$$

Отсюда получаем

$$T = F_{\text{А}} - mg = mg/2.$$

4. (25 баллов) В приведенной на рисунке цепи известны сопротивления четырех резисторов и токи в двух из них. Найти сопротивление пятого резистора и полный ток, проходящий через цепь.



Ответ. Сопротивление резистора равно R. Полный ток равен 5А.

Решение. По резистору с неизвестным сопротивлением R_x течет, очевидно, ток 1 А в направлении сверху вниз. Обозначим ток в левом верхнем резистор через I, тогда в правом верхнем резисторе ток равен $I - 1$. Одно и то же напряжение на всей цепи можно записать и как сумму напряжений на верхних резисторах, и как сумму напряжений на нижних, т.е. получить уравнение

$$IR + (I - 1)R = 5R + 2R$$

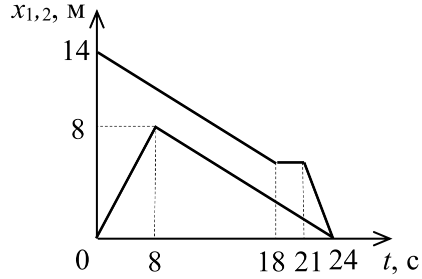
откуда находим, что $I = 4$ А. Тогда полный ток находим, например, как сумму токов в левом верхнем и левом нижнем резисторах, что дает 5 А. Чтобы найти R_x, запишем напряжение на левом нижнем резисторе как сумму напряжений на левом верхнем резисторе и на R_x, т.е.

$$5R \cdot 1 = R \cdot 4 + R_x \cdot 1$$

откуда находим, что $R_x = R$.

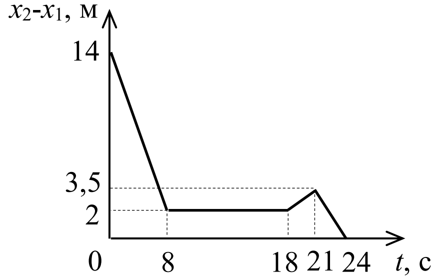
8 класс

1. (25 баллов) График зависимости от времени координат x_1 и x_2 двух тел, совершающих движение вдоль оси x, приведен на рисунке. Нарисовать график зависимости расстояния между телами от времени. Найти максимальную скорость сближения тел.



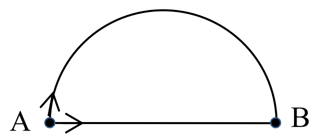
Ответ. См. график на рисунке. Максимальная скорость сближения тел равна 1,5 м/с.

Решение. Один вариант нахождения максимальной скорости сближения – непосредственно по данному в условии графику. Тела сближаются на интервалах времени 0-8 с и 21-24 с. Сравним скорости сближения на этих интервалах. На интервале 0-8 с одно тело (пусть первое) удаляется от начала координат со скоростью 1 м/с, а другое (второе) приближается к началу со скоростью 0,5 м/с (эту скорость можно найти по параллельному участка графика первого тела). Следовательно, на интервале 0-8 с скорость сближения равна 1,5 м/с. На интервале 21-24 с первое тело приближается к началу со скоростью 0,5 м/с, а второе – движется в том же направлении со скоростью 5/3 м/с (ее можно рассчитать, учитывая, что второе тело находилось в точке $x_2 = 5$ м в момент $t = 21$ с). Следовательно, скорость сближения равна 5/3 – 1/2 = 7/6 м/с, что меньше 1,5 м/с. Таким образом, максимальная скорость сближения равна 1,5 м/с.



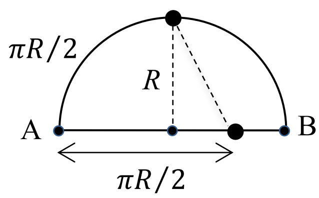
Другой вариант решения задачи – построение сначала графика зависимости расстояния между телами от времени (см. рис.), а затем нахождение по нему максимальной скорости сближения.

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают бежать с равными скоростями из точки A в точку B: один по прямой, другой по полуокружности радиуса R (см. рис.). Каким будет максимальное расстояние между жучками?



Ответ. Максимальное расстояние равно $R\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2} \approx 1{,}15R$.

Решение. Расстояние между жучками достигает максимума в тот момент, когда векторы скоростей жучков оказываются параллельными, т.е. когда бегущий по полуокружности жучок проходит ее половину. Действительно, в этот момент жучки движутся в одном направлении с одинаковой скоростью, т.е. расстояние между ними на мгновение перестает меняться, тогда как до этого оно увеличивалось. Далее жучки начинают сближаться. Расстояние L между жучками в указанный момент находим как гипотенузу прямоугольного треугольника (см. рис.)



$$L = R\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2} \approx 1{,}15R.$$

3. (25 баллов) Один шар массы m равномерно всплывает в вязкой жидкости, а другой, имеющий равный с ним радиус и массу $2m$, равномерно погружается в этой жидкости с той же скоростью. Какой будет сила натяжения нити, если скрепить ею шары и поместить их в ту же жидкость? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Сила натяжения нити равна $mg/2$.

Решение. Запишем условие баланса сил для равномерно всплывающего шара

$$F_{\text{А}} = mg + F_{\text{сопр}}$$

и равномерно погружающегося

$$2mg = F_{\text{А}} + F_{\text{сопр}}.$$

Здесь через $F_{\text{А}}$ и $F_{\text{сопр}}$ обозначены сила Архимеда и сила сопротивления, одинаковые для обоих шаров в силу равенства их радиусов и скоростей. Исключая из записанных уравнений $F_{\text{сопр}}$, находим

$$F_{\text{А}} = \frac{3}{2}mg.$$

Нетрудно видеть, что для скрепленных нитью шаров полная сила тяжести $3mg$ будет в точности компенсироваться суммарной силой Архимеда $2F_{\text{А}} = 3mg$. Это означает, что скрепленные шары будут неподвижно висеть в жидкости: легкий сверху, тяжелый снизу. Чтобы найти силу натяжения нити, запишем условие баланса сил для одного из шаров, например, верхнего (легкого)

$$F_{\text{А}} = mg + T.$$

Отсюда получаем

$$T = F_A - mg = mg/2.$$

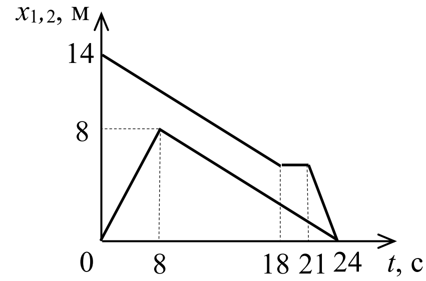
4. (25 баллов) Два одинаковых цилиндрических сосуда с площадью дна S стоят рядом на горизонтальном столе и соединены на высоте H тонкой трубкой. Один сосуд заполнен водой до уровня $3H/2$, во втором находится вода и кусок пробки объемом V_0, удерживаемый полностью погруженным с помощью прикрепленной к дну нити. Какими станут уровни воды в сосудах, если нить перерезать? Плотности воды и пробки равны $\rho_в$ и $\rho_п$.

Ответ. При $\left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} < H$ в сосудах будет одинаковый уровень воды $\frac{3H}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$. При $\left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} > H$ в сосуде с пробкой уровень станет равным $2H - \left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$, в другом сосуде H.

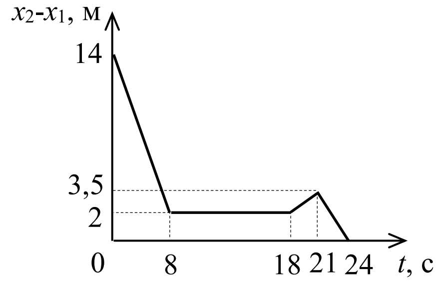
Решение. Рассмотрим сосуд, в котором есть вода и пробка. Уровень воды в нем такой же, как и в другом сосуде, т.е. $3H/2$ (сообщающиеся сосуды). После перерезания нити плавающая пробка станет вытеснять объем воды $\frac{\rho_п}{\rho_в}V_0$, меньший, чем объем V_0, который вытесняла полностью погруженная пробка. Если бы сосуд не был соединен с другим, уровень воды в нем понизился бы на величину $\left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$. Однако при понижении уровня в этом сосуде в него начнет перетекать вода из другого сосуда. Если $\left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} < H$, то уровень воды в сосудах останется выше уровня трубки, а понижение уровня воды в каждом сосуде составит $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$. Таким образом, в сосудах установится уровень воды $\frac{3H}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$. Если же $\left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} > H$, то в сосуд с пробкой перетечет вся вода, которая была выше уровня трубки в другом сосуде. В результате в сосуде с пробкой уровень воды станет равным $\frac{3H}{2} - \left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S} + \frac{H}{2} = 2H - \left(1 - \frac{\rho_п}{\rho_в}\right)\frac{V_0}{S}$, а в другом сосуде H.

7 класс

1. (25 баллов) График зависимости от времени координат x_1 и x_2 двух тел, совершающих движение вдоль оси x, приведен на рисунке. Нарисовать график зависимости расстояния между телами от времени. Найти максимальную скорость сближения тел.



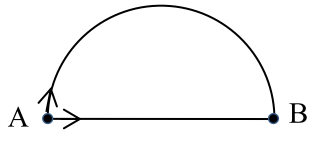
Ответ. См. график на рисунке. Максимальная скорость сближения тел равна 1,5 м/с.



Решение. Один вариант нахождения максимальной скорости сближения – непосредственно по данному в условии графику. Тела сближаются на интервалах времени 0-8 с и 21-24 с. Сравним скорости сближения на этих интервалах. На интервале 0-8 с одно тело (пусть первое) удаляется от начала координат со скоростью 1 м/с, а другое (второе) приближается к началу со скоростью 0,5 м/с (эту скорость можно найти по параллельному участка графика первого тела). Следовательно, на интервале 0-8 с скорость сближения равна 1,5 м/с. На интервале 21-24 с первое тело приближается к началу со скоростью 0,5 м/с, а второе – движется в том же направлении со скоростью 5/3 м/с (ее можно рассчитать, учитывая, что второе тело находилось в точке $x_2 = 5$ м в момент $t = 21$ с). Следовательно, скорость сближения равна 5/3 – 1/2 = 7/6 м/с, что меньше 1,5 м/с. Таким образом, максимальная скорость сближения равна 1,5 м/с.

Другой вариант решения задачи – построение сначала графика зависимости расстояния между телами от времени (см. рис.), а затем нахождение по нему максимальной скорости сближения.

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают бежать со скоростью V из точки A в точку B: один по прямой, другой по полуокружности радиуса R (см. рис.). Через какое время расстояние между жучками примет максимальное значение?



Ответ. Через время $\frac{\pi R}{2V}$.

Решение. Расстояние между жучками достигнет максимума в тот момент, когда бегущий по полуокружности жучок пройдет ее половину. Действительно, в этот момент жучки будут двигаться в одном направлении с одинаковой скоростью, т.е. расстояние между ними на мгновение перестанет меняться, тогда как до этого оно увеличивалось. Далее жучки начнут сближаться.

3. (25 баллов) Два шара одинакового радиуса из одного материала имеют внутри полости, отличающиеся по объему в 2 раза. При заполнении полостей жидкостью с плотностью ρ_0 масса каждого шара становится равной 1 кг. При заполнении полостей жидкостью с плотностью $0{,}8\rho_0$ масса шара с большей полостью становится равной 0,9 кг. Чему при этом равна масса другого шара? Чему равна плотность материала, из которого сделаны шары?

Ответ. Масса шара равна 0,95 кг. Плотность материала равна ρ_0.

Решение. Обозначим через m_1 массу шара с меньшей полостью, через m_2 массу шара с большей полостью, а через V_0 объем меньшей полости. Тогда можно составить следующие уравнения:

$$m_1 + \rho_0 V_0 = 1, \quad m_2 + \rho_0 2V_0 = 1, \quad m_2 + 0{,}8\rho_0 2V_0 = 0{,}9.$$

Из второго и третьего уравнений находим

$$\rho_0 V_0 = 0{,}25 \text{ кг}, \quad m_2 = 0{,}5 \text{ кг}.$$

С учетом найденного значения $\rho_0 V_0$ из первого уравнения получаем $m_1 = 0{,}75$ кг. Тогда искомая масса шара находится как

$$m_1 + 0{,}8\rho_0 V_0 = 0{,}75 + 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}95 \text{ кг}.$$

Чтобы найти плотность материала шаров, из двух первых исходных уравнений получим

$$m_1 - m_2 = \rho_0 V_0.$$

Поскольку объемы оболочек шаров отличаются на V_0, то $m_1 - m_2$ можно записать также как $\rho_ш V_0$, где $\rho_ш$ – плотность материала шаров. Сравнивая с предыдущей формулой, находим, что $\rho_ш = \rho_0$.

4. (25 баллов) При подвешивании гирьки к резинке длиной 120 см она удлиняется на 12 см. Две третьих длины резинки сложили вдвое и закрепили так, как показано на рисунке. На сколько теперь растянет резинку та же гирька?

Ответ. На 6 см.

Решение. В первом опыте резинка растягивалась равномерно, следовательно, треть резинки растягивалась на 4 см. Таким же будет растяжение верхнего (одинарного) куска резинки во втором опыте. Два параллельных нижних куска растянутся вдвое меньше, т.е. на 4 : 2 = 2 см. Общее растяжение будет равно 4 + 2 = 6 см.

Авторы: Бакунов М.И., Бирагов С.Б.