

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
2021-2022 уч.г.
г. Саров, Нижегородская область
МАТЕМАТИКА
Отборочный тур
9 класс

№1. (10 баллов) Найти наименьшее натуральное число, большее 1 и дающее при делении на 2, 3, 4, 5, 6 остаток, равный 1.

№2. (10 баллов) Найти количество упорядоченных троек натуральных чисел a, b, c если $\text{НОД}(a, b, c) = 30$; $\text{НОК}(a, b, c) = 2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}$.

№3. (10 баллов) Решить неравенство $\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2} \geq 0$.

№4. (10 баллов) Найти все значения параметра a , при которых вершины двух парабол $y = x^2 + 4ax - a$ и $y = -ax^2 + 4x + a + 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -3$.

№5. (15 баллов) Три гонщика стартуют одновременно из одной точки шоссе, имеющих форму окружности, и едут в одном направлении с постоянными скоростями. Первый гонщик впервые после старта догнал второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной старту, а через полчаса после этого он вторично обогнал третьего гонщика. Второй гонщик впервые догнал третьего через три часа после старта. Сколько кругов в час делает первый гонщик, если второй гонщик проходит круг не менее, чем за двадцать минут.

№6. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ \frac{x^3 + y^3}{x^5 + y^5} = \frac{7}{31}. \end{cases}$$

№7. (15 баллов) В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена высота, из другой — биссектриса, из третьей — медиана. Докажите, что проведенные биссектриса и медиана не могут разделить высоту на три равные части.

№8. (15 баллов) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{xy}{3}} \geq 2x - y, \\ \frac{y - 8}{x^2 + y^2 - 64} > \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M .

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
2021-2022 уч.г.
г. Саров, Нижегородская область
МАТЕМАТИКА
Отборочный тур
10 класс

№1. (10 баллов) Доказать, что квадрат простого числа, большего 5, при делении на 30 дает в остатке 1 или 19.

№2. (10 баллов) Найти количество упорядоченных троек натуральных чисел a, b, c если $\text{НОД}(a, b, c) = 30$; $\text{НОК}(a, b, c) = 2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}$.

№3. (10 баллов) Решить неравенство $\sqrt{\sqrt{12x + \frac{169}{4}} + \frac{13}{2}} \geq x$.

№4. (10 баллов) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x + 5} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

№5. (15 баллов) Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от второго ее члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

№6. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ \frac{x^3 + y^3}{x^5 + y^5} = \frac{7}{31}. \end{cases}$$

№7. (15 баллов) В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O - точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S , диаметрально противоположная точке O . Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

№8. (15 баллов) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{xy}{3}} \geq 2x - y, \\ \frac{y - 8}{x^2 + y^2 - 64} > \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M .

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
2021-2022 уч.г.
г. Саров, Нижегородская область
МАТЕМАТИКА
Отборочный тур
11 класс

№1. (10 баллов) Доказать, что ни при каком натуральном n число $1 + 2 + \dots + n$ не может оканчиваться ни одной из цифр 2, 4, 7, 9.

№2. (10 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 3y + 5z = 1, \\ 4x + 5y - 2z = 4. \end{cases}$$

в целых числах.

№3. (10 баллов) Решить неравенство $\frac{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}{|x^2 + 2x - 3| - |x^2 + 6x + 5|} \geq 0$.

№4. (10 баллов) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x + 5} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

№5. (15 баллов) Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от второго ее члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

№6. (15 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{\log_3(xy)} - \log_3 \frac{1}{xy} = 3, \\ \log_3(3 + xy) - 2 \log_9 y = \log_3(y - 1). \end{cases}$$

№7. (15 баллов) В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O - точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S , диаметрально противоположная точке O . Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

№8. (15 баллов) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{xy}{3}} \geq 2x - y, \\ \frac{y - 8}{x^2 + y^2 - 64} > \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.