Школьные Харитоновские чтения 2022. Математика

1. **(10 баллов)** В шар радиуса a вписан цилиндр такой, что площадь его боковой поверхности максимальна. Найдите объём этого цилиндра.

   Ответ: $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$.

   Решение. Пусть O – центр сферы, H – его проекция на одно из оснований цилиндра, F – некоторая точка на окружности этого основания. Обозначим высоту цилиндра через h, радиус основания через R, площадь боковой поверхности цилиндра через S, его объём через V, а также $\angle FOH = \alpha$. Из треугольника HFO следует, что $h = 2HO = 2OF\cos\alpha = 2a\cos\alpha$; $R = HF = a\sin\alpha$. Отсюда $S = 2\pi Rh = 4\pi a^2\sin\alpha\cos\alpha = 2\pi a^2\sin 2\alpha$. Ввиду того, что синус угла не превосходит единицы, получаем, что площадь боковой поверхности максимальна при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $2\alpha = 90^\circ$. Значит, $\alpha = 45^\circ$, а объём цилиндра при этом равен $V = \pi R^2 h = \pi(a\sin\alpha)^2\cdot 2a\cos\alpha = \frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$.

2. **(15 баллов)** Найдите все значения параметра p такие, что система уравнений

$$\begin{cases} 2+\log_2 y = \log_2(x+3y), \\ y = x+2p-4+2(x-p)^2 \end{cases}$$

   имеет ровно два решения.

   Ответ: $p \in (1;2)$.

   Решение. Данная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} \log_2(4y) = \log_2(x+3y), \\ y = x+2p-4+2(x-p)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = x+3y, \\ 4y > 0, \\ y = x+2p-4+2(x-p)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ x > 0, \\ 2(x-p)^2 = 4-2p. \end{cases}$$

   Заметим, что количество решений системы равно количеству положительных решений её последнего уравнения. Это уравнение имеет два различных корня при $4-2p>0 \Leftrightarrow p<2$; корни при этом определяются формулами $x_1 = p-\sqrt{2-p}$, $x_2 = p+\sqrt{2-p}$. Очевидно, $x_1 < x_2$, поэтому оба корня положительны тогда и только тогда, когда $x_1 > 0$, откуда

$$p-\sqrt{2-p} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0, \\ p^2 > 2-p, \\ 2-p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < p < 2.$$

   Итак, $p \in (1;2)$.

3. **(10 баллов)** Пункты A и B расположены на берегу одной реки. Моторная лодка проходит путь от A к B за 6 часов, а от B к A – за 7 часов (при этом собственная скорость лодки постоянна). За какое время путь от A до B проделает плот?

   Ответ: 84 часа.

   Решение. Пусть S – расстояние между A и B, v – собственная скорость лодки, u – скорость. течения. Из условия следует, что $\frac{S}{v+u} = 6$, $\frac{S}{v-u} = 7$. Значит, $6(v+u) = 7(v-u)$, $v = 13u$, откуда $S = 84u$, т.е. искомое время равно $\frac{S}{u} = 84$ часа.

4. **(20 баллов)** Студент сдаст экзамен, если верно ответит на по крайней мере три из четырёх вопросов, заданных преподавателем. Его могут спросить любой из 30 вопросов программы, но он знает ответы лишь на 25 из них. На первый вопрос из четырёх студент ответил верно. Определите вероятность, что студент сдаст экзамен.

   Ответ: $\frac{1702}{1827}$.

   Решение. Раз на первый вопрос студент ответил верно, то остаётся 29 вопросов, из которых ему зададут три (при этом он знает ответы на 24 вопроса). Для успешной сдачи экзамена необходимо ответить на по крайней мере два из них. Всего есть $C_{29}^3 = 3654$ комбинаций из трёх вопросов. Из них $C_{24}^3 = 2024$ комбинации состоят из трёх известных вопросов, а $C_{24}^2 \cdot C_5^1 = 1380$ – из двух известных и одного неизвестного вопроса. В итоге получаем, что вероятность равна $\frac{2024+1380}{3654} = \frac{1702}{1827}$.

5. **(15 баллов)** В выпуклом четырёхугольнике $PQRS$ известно, что $PQ = RS = 4$, $PR = PS$, $\angle QPS = 45°$, $\angle RSP = 75°$. Найдите QR и PS.

   Ответ: $PS = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$, $QR = 4$.

   Решение. Треугольник PRS равнобедренный и $\angle RSP = 75°$, поэтому $\angle PRS = 75°$, $\angle RPS = 30°$; значит, $\angle QPR = 45° - 30° = 15°$. Из треугольника PRS находим, что $PS = PR = \frac{1}{2}RS \cdot \frac{1}{\cos 75°} = \frac{2}{\cos 75°}$. Следовательно, $PS = \frac{2}{cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$. Далее по теореме косинусов из треугольника PQR имеем $QR^2 = 16 + \frac{4}{\cos^2 75°} - \frac{16\cos 15°}{\cos 75°} = \frac{16\cos^2 75° + 4 - 16\cos 75° \cos 15°}{\cos^2 75°} = \frac{8 + 8\cos 150° + 4 - 8\cos 60° - 8\cos 90°}{0{,}5(1+\cos 150°)} = 16$, $QR = 4$.

6. **(15 баллов)** Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = \alpha$ (α известно). Рёбра DA, DB, DC образуют угол $45°$ с плоскостью ABC. Найдите угол между плоскостями DAC и DAB.

   Ответ: $\arccos \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

   Решение. Пусть H – проекция точки D на плоскость ABC. Треугольники ADH, BDH, CDH равны по катету (DH – общая сторона) и острому углу ($\angle DAH = \angle DBH = \angle DCH = 45°$). Отсюда $AH = BH = CH$, и точка H – центр описанной окружности треугольника ABC, т.е. середина его гипотенузы AC. Обозначим $AC = 2x$. Тогда $BH = AH = CH = x$, $DH = AH \operatorname{tg} 45° = x$.
   Введём систему координат с центром в точке H такую, что положительные направления осей Ox, Oy совпадают с направлениями лучей BC, BA соответственно, а положительное направление оси OZ сонаправлено вектору HD. Тогда точки имеют следующие координаты: $B(0;0;0)$, $A(0;2x\sin\alpha;0)$, $H(x\cos\alpha;x\sin\alpha;0)$, $C(2x\cos\alpha;0;0)$, $D(x\cos\alpha;x\sin\alpha;x)$. Пусть $\mathbf{n}_1(a;b;c)$ – вектор нормали к плоскости ACD. Тогда скалярное произведение вектора $\mathbf{n}_1$ на каждый из векторов $\overrightarrow{AC}(2x\cos\alpha;-2x\sin\alpha;0)$, $\overrightarrow{AD}(x\cos\alpha;-x\sin\alpha;x)$ равно нулю. Получаем соотношения $a\cos\alpha - b\sin\alpha = 0$, $a\cos\alpha - b\sin\alpha + c = 0$. В качестве вектора $\mathbf{n}_1$ можно взять, например, $\mathbf{n}_1(\sin\alpha;\cos\alpha;0)$. (Направление вектора определено однозначно, а его длина – нет.) Аналогично находим, что вектор нормали к плоскости ABD имеет вид $\mathbf{n}_2(1;0;-\cos\alpha)$.
   Выражаем скалярное произведение $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ двумя способами: $|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2| \cos\angle(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2) = \sin\alpha + 0\cos\alpha + 0\cos\alpha = \sin\alpha$, поэтому $\cos\angle(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2) = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$.

7. **(15 баллов)** Решите уравнение $\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + 1} = 0$.

   Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

   Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x + \sin^2 x = 1 + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x, \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x \leqslant 0 \end{cases}$$

   Несложно видеть, что уравнение системы выполнено тождественно. Остаётся решить неравенство. Получаем $\sin\frac{\pi}{6}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x \leqslant 0$, $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 0$, откуда $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x - \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.