ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2022-2023
Физика, II тур

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту. Через время τ бросили второе тело так, что оно полетело по той же траектории. Каким будет минимальное расстояние между телами во время их полета? Через какое время расстояние станет минимальным? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Минимальное расстояние равно $V_0\tau\cos\alpha$ и достигается через время $\frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}$.

Решение. Введем оси x (горизонтальную) и y (вертикальную) из точки броска и запишем зависимости координат тел от времени t (отсчитываемого от броска первого тела) в виде

$$x_1 = V_0\cos\alpha\, t, \qquad y_1 = V_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = V_0\cos\alpha\,(t-\tau), \qquad y_2 = V_0\sin\alpha\,(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Расстояние между телами R определяется формулой

$$R = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

где

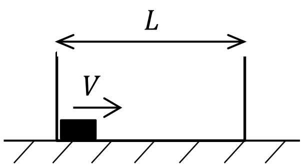
$$x_1 - x_2 = V_0\tau\cos\alpha, \qquad y_1-y_2 = V_0\tau\sin\alpha - g\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

Поскольку разность x_1-x_2 не зависит от времени, то минимальное значение R достигается в момент, когда разность y_1-y_2 обращается в нуль (тела оказываются на одной высоте), т.е. при

$$t = \frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}.$$

В этот момент расстояние между телами равно $V_0\tau\cos\alpha$.

2. (25 баллов) На горизонтальном столе лежит коробка длины L и массы m, в которой у одной из стенок находится шайба той же массы. Шайбе сообщают скорость V в направлении противоположной стенки (см. рис.). Считая, что соударения шайбы со стенками упругие, трение между шайбой и коробкой отсутствует, а коэффициент трения между коробкой и столом равен μ, найти пройденные коробкой и шайбой пути. Ускорение свободного падения равно g. Диаметр шайбы мал по сравнению с L.



Ответ. Путь, пройденный коробкой, равен $V^2/(4\mu g)$. Путь, пройденный шайбой, равен $(1+n)L$, где n равно целой части отношения $V^2/(4\mu gL)$.

Решение. Известно, что при абсолютно упругом лобовом соударении тел равной массы происходит обмен тел скоростями (это следует из законов сохранения импульса и механической энергии). В данной задаче после достижения шайбой стенки коробки (правой на рисунке) и удара о нее шайба остановится, а коробка получит скорость V. Двигаясь далее под действием силы трения равнозамедленно, коробка может остановиться, пройдя расстояние, меньшее L. Если же коробка не остановится (трение слишком слабое), то произойдет соударение левой стенки коробки с шайбой. При этом коробка остановится, а шайба приобретет скорость коробки. Пройдя расстояние L, шайба «вернет» ту же скорость коробке, и равнозамедленное движение коробки возобновится. Таким образом, пройденный коробкой полный путь $S_к$ будет таким же, как при ее непрерывном замедленном движении под действием силы трения, равной $2\mu mg$. Чтобы найти этот путь, приравниваем изменение кинетической энергии работе силы трения

$$0-\frac{mV^2}{2} = -2\mu mgS_к.$$

В результате получаем

$$S_к = \frac{V^2}{4\mu g}.$$

При нахождении пути шайбы $S_ш$ учтем, что каждое ее соударение с левой стенкой коробки добавляет к пути величину L. Число таких соударений n равно целой части отношения $S_к/L = V^2/(4\mu gL)$. Добавляя nL к первому перемещению шайбы от левой до правой стенки, получаем

$$S_ш = (1+n)L.$$

3. (25 баллов) На окружности радиуса R размещены на равном расстоянии друг от друга 2023 точечных электрических заряда, из них 2022 заряда $+q$ и один $-q$. Найти напряженность электрического поля в центре окружности.

Ответ. Напряженность электрического поля равна $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$, где ε_0 – электрическая постоянная.

Решение. Точечный заряд $-q$ можно представить как расположенные в одной точке заряды $+q$ и $-2q$. При этом заряд $+q$ дополнит систему 2022 положительных зарядов до полностью симметричной: все 2023 заряда $+q$ будут находиться на равном расстоянии друг от друга. В силу симметрии (отсутствия выделенного направления) поле этой системы зарядов в центре окружности равно нулю. Таким образом, искомое поле E будет равно полю заряда $-2q$, т.е.

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2},$$

где ε_0 – электрическая постоянная.

4. (25 баллов) К вбитому в потолок гвоздю привязали на нитях длиной L два груза так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях. Для возбуждения колебаний оба маятника отклонили на небольшой угол θ_0 от вертикали, затем отпустили один из них, а когда тот достиг угла $\theta_0/2$, отпустили и второй. Каким будет минимальное расстояние между грузами в процессе колебаний? Через какое время после начала движения это расстояние будет достигнуто в первый раз? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Минимальное расстояние равно $\frac{L\theta_0}{\sqrt{2}}$ и в первый раз достигается через время $t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}$ после начала движения второго маятника.

Решение. В силу малости углов отклонения маятников можно пренебречь смещением грузов по вертикали и считать, что они движутся в горизонтальной плоскости. Вводя в этой плоскости взаимоперпендикулярные оси x и y вдоль направлений движения маятников, зависимости от времени координат грузов можно записать в виде

$$x = L\theta_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \qquad y = L\theta_0 \cos\omega t,$$

где использовано $\sin\theta_0 \approx \theta_0$ и начальная фаза колеблющегося вдоль оси x маятника подобрана такой, чтобы в момент $t = 0$ угол его отклонения равнялся $\theta_0/2$ (в этот момент другой маятник только начинает движение от положения максимального отклонения). Грузы будут сближаться друг с другом с момента $t = 0$ до момента $\omega t = \frac{\pi}{3}$, когда они окажутся на одинаковом расстоянии $L\theta_0/2$ от положения равновесия ($x = -L\theta_0/2$ и $y = L\theta_0/2$) и будут иметь одинаковые по величине скорости. Действительно, в этот момент проекции скоростей грузов на соединяющую их линию будут равны, и, следовательно, скорость сближения грузов обратится в нуль, что и означает достижение минимума расстояния между грузами. Это минимальное расстояние равно

$$R_{\min} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{L\theta_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{L\theta_0}{2}\right)^2} = \frac{L\theta_0}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что для математического маятника $\omega = \sqrt{g/L}$, находим момент достижения минимального расстояния

$$t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

10 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту. Через время τ бросили второе тело так, что оно полетело по той же траектории. Каким будет минимальное расстояние между телами во время их полета? Через какое время расстояние станет минимальным? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Минимальное расстояние равно $V_0\tau\cos\alpha$ и достигается через время $\frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}$.

Решение. Введем оси x (горизонтальную) и y (вертикальную) из точки броска и запишем зависимости координат тел от времени t (отсчитываемого от броска первого тела) в виде

$$x_1 = V_0\cos\alpha\, t, \qquad y_1 = V_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = V_0\cos\alpha\,(t-\tau), \qquad y_2 = V_0\sin\alpha\,(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Расстояние между телами R определяется формулой

$$R = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

где

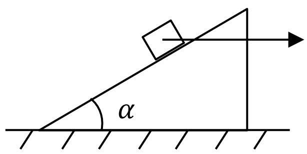
$$x_1 - x_2 = V_0\tau\cos\alpha, \qquad y_1-y_2 = V_0\tau\sin\alpha - g\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

Поскольку разность x_1-x_2 не зависит от времени, то минимальное значение R достигается в момент, когда разность y_1-y_2 обращается в нуль (тела оказываются на одной высоте), т.е. при

$$t = \frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}.$$

В этот момент расстояние между телами равно $V_0\tau\cos\alpha$.

2. (25 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина той же массы с углом α при основании, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к бруску горизонтальную силу (см. рис.). При какой величине силы ускорение бруска будет направлено горизонтально? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Величина силы равна $2mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Решение. Ускорение клина направлено горизонтально, в сторону действия внешней силы. При горизонтальном ускорении бруска ускорения бруска и клина оказываются сонаправленными и, следовательно, должны быть одинаковыми по величине (брусок находится на клине). Обозначим величину ускорения тел через a.

Клин ускоряется под действием горизонтальной составляющей силы N, действующей со стороны бруска на клин по нормали к наклонной грани клина. Таким образом, второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальное направление можно записать как

$$ma = N\sin\alpha,$$

откуда следует, что

$$N = ma/\sin\alpha.$$

Клин действует на брусок с такой же по величине, но противоположно направленной силой. Вертикальная компонента этой силы, равная $N\cos\alpha$, должна компенсировать действующую на брусок силу тяжести, чтобы ускорение бруска было горизонтальным, т.е. должно выполняться условие

$$N\cos\alpha = mg.$$

Из двух последних соотношений находим, что

$$N = mg/\cos\alpha,\ a = g\,tg\,\alpha.$$

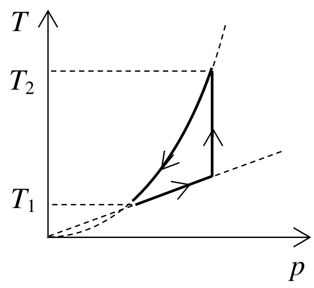
Обозначив приложенную силу через F, запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальное направление как

$$ma = F - N\sin\alpha.$$

Подставляя в это соотношение найденные значения N и a, находим, что

$$F = 2mg\,tg\,\alpha.$$

3. (25 баллов) Одноатомный идеальный газ совершает циклический процесс, график которого на плоскости p, T состоит из двух прямых отрезков и участка параболы (см. рис.). Найти КПД цикла, если температуры T_1 и T_2 известны.

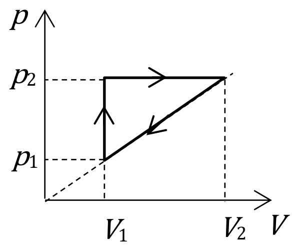


Ответ. КПД равен

$$\eta = \frac{\sqrt{T_2/T_1} - 1}{5\sqrt{T_2/T_1} + 3}.$$

Решение.

Изобразим процесс на плоскости p, V, используя уравнение Клапейрона–Менделеева $pV = \nu RT$ (см. рис.).



КПД теплового двигателя определяется формулой $\eta = A_ц/Q_п$, где $A_ц$ – работа газа за цикл, а $Q_п$ – полученное газом тепло. Работа газа может быть найдена как площадь треугольника $A_ц = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\alpha(V_2 - V_1)^2$, где использована линейная зависимость давления от объема $p = \alpha V$ на наклонном участке цикла (гипотенузе треугольника), α – некоторый коэффициент.

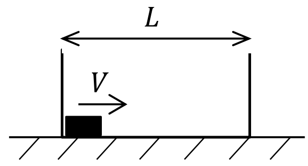
Газ получает тепло на вертикальном (изохорном) и горизонтальном (изобарном) участках. Тепло, полученное на изохорном участке, равно приращению внутренней энергии газа: $Q_V = \Delta U = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 = \frac{3}{2}\alpha(V_2 - V_1)V_1$. Тепло, полученное на изобарном участке, равно сумме работы газа и приращения его внутренней энергии: $Q_p = A + \Delta U = p_2(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}p_2(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}\alpha(V_2 - V_1)V_2$. Таким образом, получаем, что $Q_п = Q_V + Q_p = \frac{1}{2}\alpha(V_2 - V_1)(3V_1 + 5V_2)$. Подставляя найденные выражения для $A_ц$ и $Q_п$ в формулу $\eta = A_ц/Q_п$, получаем КПД цикла в виде

$$\eta = \frac{V_2/V_1 - 1}{5\,V_2/V_1 + 3}.$$

Учитывая, что на параболическом участке исходного цикла $T = \beta V^2$, β – некоторый коэффициент, выразим отношение объемов как $V_2/V_1 = \sqrt{T_2/T_1}$. Окончательно получаем

$$\eta = \frac{\sqrt{T_2/T_1} - 1}{5\sqrt{T_2/T_1} + 3}.$$

4. (25 баллов) На горизонтальном столе лежит коробка длины L и массы m, в которой у одной из стенок находится шайба той же массы. Шайбе сообщают скорость V в направлении противоположной стенки (см. рис.). Считая, что соударения шайбы со стенками упругие, трение между шайбой и коробкой отсутствует, а коэффициент трения между коробкой и столом равен μ, найти пройденные коробкой и шайбой пути. Ускорение свободного падения равно g. Диаметр шайбы мал по сравнению с L.



Ответ. Путь, пройденный коробкой, равен $V^2/(4\mu g)$. Путь, пройденный шайбой, равен $(1+n)L$, где n равно целой части отношения $V^2/(4\mu gL)$.

Решение. Известно, что при абсолютно упругом лобовом соударении тел равной массы происходит обмен тел скоростями (это следует из законов сохранения импульса и механической энергии). В данной задаче после достижения шайбой стенки коробки (правой на рисунке) и удара о нее шайба остановится, а коробка получит скорость V. Двигаясь далее под действием силы трения равнозамедленно, коробка может остановиться, пройдя расстояние, меньшее L. Если же коробка не остановится (трение слишком слабое), то произойдет соударение левой стенки коробки с шайбой. При этом коробка остановится, а шайба приобретет скорость коробки. Пройдя расстояние L, шайба «вернет» ту же скорость коробке, и равнозамедленное движение коробки возобновится. Таким образом, пройденный коробкой полный путь $S_к$ будет таким же, как при ее непрерывном замедленном движении под действием силы трения, равной $2\mu mg$. Чтобы найти этот путь, приравниваем изменение кинетической энергии работе силы трения

$$0-\frac{mV^2}{2}=-2\mu mgS_{\text{к}}.$$

В результате получаем

$$S_{\text{к}}=\frac{V^2}{4\mu g}.$$

При нахождении пути шайбы $S_{\text{ш}}$ учтем, что каждое ее соударение с левой стенкой коробки добавляет к пути величину L. Число таких соударений n равно целой части отношения $S_{\text{к}}/L=V^2/(4\mu gL)$. Добавляя nL к первому перемещению шайбы от левой до правой стенки, получаем

$$S_{\text{ш}}=(1+n)L.$$

9 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту. Через время τ бросили второе тело так, что оно полетело по той же траектории. Каким будет минимальное расстояние между телами во время их полета? Через какое время расстояние станет минимальным? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Минимальное расстояние равно $V_0\tau\cos\alpha$ и достигается через время $\frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}$.

Решение. Введем оси x (горизонтальную) и y (вертикальную) из точки броска и запишем зависимости координат тел от времени t (отсчитываемого от броска первого тела) в виде

$$x_1=V_0\cos\alpha\, t,\qquad y_1=V_0\sin\alpha\, t-\frac{gt^2}{2},$$

$$x_2=V_0\cos\alpha\,(t-\tau),\qquad y_2=V_0\sin\alpha\,(t-\tau)-\frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Расстояние между телами R определяется формулой

$$R=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

где

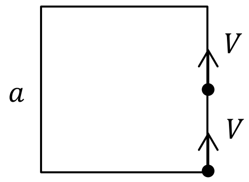
$$x_1-x_2=V_0\tau\cos\alpha,\qquad y_1-y_2=V_0\tau\sin\alpha-g\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

Поскольку разность x_1-x_2 не зависит от времени, то минимальное значение R достигается в момент, когда разность y_1-y_2 обращается в нуль (тела оказываются на одной высоте), т.е. при

$$t=\frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}.$$

В этот момент расстояние между телами равно $V_0\tau\cos\alpha$.

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают движение со скоростью V по сторонам квадрата: один из вершины, другой с середины стороны (см. рис.). Через какое время расстояние между жучками достигнет минимального значения? Чему равно это значение? Длина стороны квадрата равна a.



Ответ. Минимальное расстояние равно $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ и достигается через время $\frac{3a}{4V}$.

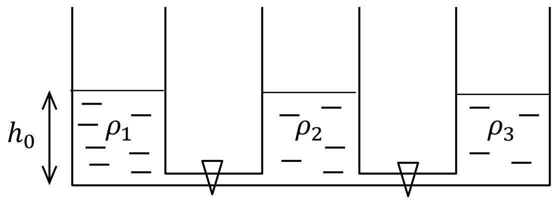
Решение. В начале движения расстояние между жучками остается постоянным. После того, как один из жучков (верхний на рисунке) достигнет вершины квадрата, расстояние между жучками начнет уменьшаться (верхний жучок станет двигаться в сторону, а не от второго жучка, как до этого). Уменьшение расстояния продолжится до момента, когда жучки расположатся симметрично относительно вершины – на одинаковом расстоянии $a/4$ от нее. Действительно, в этот момент проекции векторов скоростей жучков на соединяющую их линию окажутся одинаковыми, т.е. скорость сближения жучков обратится в нуль. Это и означает достижение минимума расстояния (сближение меняется на удаление). Расстояние L между жучками в указанный момент находим как гипотенузу прямоугольного треугольника

$$L=\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Время движения t до симметричного расположения жучков равно

$$t = \frac{3a}{4V}.$$

3. (25 баллов) Три одинаковых цилиндрических сосуда стоят рядом на горизонтальном столе и соединены вблизи дна тонкими трубками, которые перекрыты кранами (см. рис.). Сосуды заполнены до уровня h_0 жидкостями с плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3, причем $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$. В какой последовательности нужно открыть краны, чтобы получить максимальную высоту столба жидкости в одном из сосудов? Чему равна эта высота?



Ответ. Сначала нужно открыть кран между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. Высота столба жидкости будет равна $\frac{h_0}{2}\left(\frac{11}{3} - \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2+\rho_3}{3\rho_1}\right)$.

Решение. Чтобы добиться максимального подъема уровня жидкости, нужно поднимать менее плотные жидкости. Следовательно, сначала нужно открыть кран между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. При этом часть жидкости плотности ρ_2 перетечет в сосуд с жидкостью плотности ρ_3, подняв снизу весь столб наименее плотной жидкости. После открытия второго крана жидкость наибольшей плотности ρ_1 перетечет в соседние сосуды и поднимет снизу имеющиеся там столбы жидкостей. При этом в крайне правом на рисунке сосуде будет достигнут наибольший подъем уровня жидкости, а столб жидкости в этом сосуде будет состоять из жидкостей всех трех видов.

Для расчета высоты столба рассмотрим сначала ситуацию после открытия крана между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. Запишем условие равенства давлений у дна этих сосудов в виде

$$\rho_2 h_2 = \rho_2 h_3 + \rho_3 h_0,$$

где h_2 и h_3 – высоты столбов жидкости с плотностью ρ_2 во втором и третьем сосудах. Учитывая, что $h_2 + h_3 = h_0$, находим, что

$$h_2 = \frac{h_0}{2}\left(1 + \frac{\rho_3}{\rho_2}\right), \quad h_3 = \frac{h_0}{2}\left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_2}\right).$$

После открытия второго крана условия равенства давлений в сосудах можно записать как

$$\rho_1 h_1 = \rho_1 h_{12} + \rho_2 h_2, \quad \rho_1 h_1 = \rho_1 h_{13} + \rho_2 h_3 + \rho_3 h_0,$$

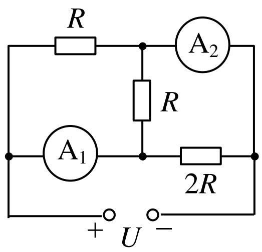
где через h_{12} и h_{13} обозначены высоты столбов жидкости плотности ρ_1 во втором и третьем сосудах соответственно. Учитывая также, что $h_1 + h_{12} + h_{13} = h_0$, находим

$$h_1 = \frac{h_0}{3}\left(1 + \frac{\rho_2 + \rho_3}{\rho_1}\right), \quad h_{12} = h_{13} = \frac{h_0}{3}\left(1 - \frac{\rho_2 + \rho_3}{2\rho_1}\right).$$

Полная высота столба в третьем сосуде будет равна

$$H_3 = h_{13} + h_3 + h_0 = \frac{h_0}{2}\left(\frac{11}{3} - \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2 + \rho_3}{3\rho_1}\right).$$

4. (25 баллов) Цепь, составленная из резисторов с сопротивлениями R и $2R$ и амперметров с пренебрежимо малыми сопротивлениями, подключена к источнику с напряжением U (см. рис.). Найти показания амперметров.

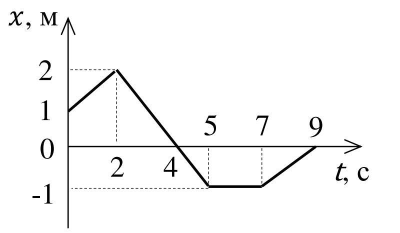


Ответ. Амперметр A_1 показывает ток $1{,}5U/R$, амперметр A_2 показывает $2U/R$.

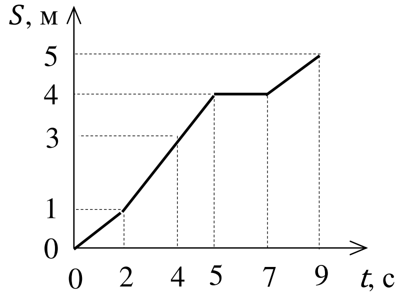
Решение. Поскольку сопротивления амперметров пренебрежимо малы, можно считать, что напряжение источника подводится к каждому из трех резисторов. Следовательно, токи через резисторы с сопротивлениями R равны U/R, а ток через резистор с сопротивлением $2R$ равен $U/(2R)$. Ток через средний резистор течет вверх. При этом ток через A_1 равен сумме токов через средний и правый нижний резисторы, т.е. $3U/(2R)$, а ток через A_2 равен сумме токов через средний и левый верхний резисторы, т.е. $2U/R$.

8 класс

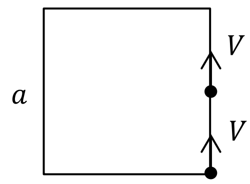
1. (25 баллов) График зависимости от времени координаты x частицы, совершающей движение вдоль оси x, приведен на рисунке. Нарисовать график зависимости пройденного частицей пути от времени.



Ответ. См. график на рисунке.



2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают движение со скоростью V по сторонам квадрата: один из вершины, другой с середины стороны (см. рис.). Через какое время расстояние между жучками достигнет минимального значения? Чему равно это значение? Длина стороны квадрата равна a.



Ответ. Минимальное расстояние равно $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ и достигается через время $\frac{3a}{4V}$.

Решение. В начале движения расстояние между жучками остается постоянным. После того, как один из жучков (верхний на рисунке) достигнет вершины квадрата, расстояние между жучками начнет уменьшаться (верхний жучок станет двигаться в сторону, а не от второго жучка, как до этого). Уменьшение расстояния продолжится до момента, когда жучки расположатся симметрично относительно вершины – на одинаковом расстоянии $a/4$ от нее. Действительно, в этот момент проекции векторов скоростей жучков на соединяющую их линию окажутся одинаковыми, т.е. скорость сближения жучков обратится в нуль. Это и означает достижение минимума расстояния (сближение меняется на удаление). Расстояние L между жучками в указанный момент находим как гипотенузу прямоугольного треугольника

$$L = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Время движения t до симметричного расположения жучков равно

$$t = \frac{3a}{4V}.$$

3. (25 баллов) В два одинаковых цилиндрических сосуда налиты равные объемы жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$). После того, как в сосуд с менее плотной жидкостью поместили тело, объем которого в 4 раза меньше объема жидкости, силы давления на дно сосудов стали равными. Чему равна плотность тела?

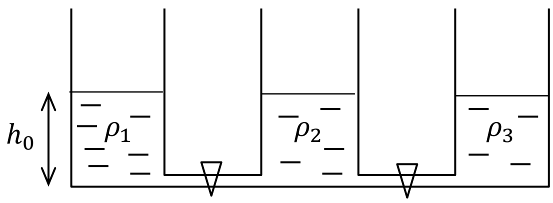
Ответ. Плотность тела равна $4(\rho_2 - \rho_1)$.

Решение. Запишем условие равенства сил давления на дно сосудов в виде

$$\rho_1 Vg + \rho_{\text{т}} \frac{1}{4} Vg = \rho_2 Vg,$$

где g – ускорение свободного падения, а V и $\rho_{\text{т}}$ – объем жидкости и плотность тела. Отсюда находим, что $\rho_{\text{т}} = 4(\rho_2 - \rho_1)$.

4. (25 баллов) Три одинаковых цилиндрических сосуда стоят рядом на горизонтальном столе и соединены вблизи дна тонкими трубками, которые перекрыты кранами (см. рис.). Сосуды заполнены до уровня h_0 жидкостями с плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3, причем $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$. В какой последовательности



нужно открыть краны, чтобы получить максимальную высоту столба жидкости в одном из сосудов? Чему равна эта высота?

Ответ. Сначала нужно открыть кран между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. Высота столба жидкости будет равна $\frac{h_0}{2}\left(\frac{11}{3}-\frac{\rho_3}{\rho_2}-\frac{\rho_2+\rho_3}{3\rho_1}\right)$.

Решение. Чтобы добиться максимального подъема уровня жидкости, нужно поднимать менее плотные жидкости. Следовательно, сначала нужно открыть кран между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. При этом часть жидкости плотности ρ_2 перетечет в сосуд с жидкостью плотности ρ_3, подняв снизу весь столб наименее плотной жидкости. После открытия второго крана жидкость наибольшей плотности ρ_1 перетечет в соседние сосуды и поднимет снизу имеющиеся там столбы жидкостей. При этом в крайне правом на рисунке сосуде будет достигнут наибольший подъем уровня жидкости, а столб жидкости в этом сосуде будет состоять из жидкостей всех трех видов.

Для расчета высоты столба рассмотрим сначала ситуация после открытия крана между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. Запишем условие равенства давлений у дна этих сосудов в виде

$$\rho_2 h_2 = \rho_2 h_3 + \rho_3 h_0,$$

где h_2 и h_3 – высоты столбов жидкости с плотностью ρ_2 во втором и третьем сосудах. Учитывая, что $h_2 + h_3 = h_0$, находим, что

$$h_2 = \frac{h_0}{2}\left(1+\frac{\rho_3}{\rho_2}\right), \quad h_3 = \frac{h_0}{2}\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_2}\right).$$

После открытия второго крана условия равенства давлений в сосудах можно записать как

$$\rho_1 h_1 = \rho_1 h_{12} + \rho_2 h_2, \quad \rho_1 h_1 = \rho_1 h_{13} + \rho_2 h_3 + \rho_3 h_0,$$

где через h_{12} и h_{13} обозначены высоты столбов жидкости плотности ρ_1 во втором и третьем сосудах соответственно. Учитывая также, что $h_1 + h_{12} + h_{13} = h_0$, находим

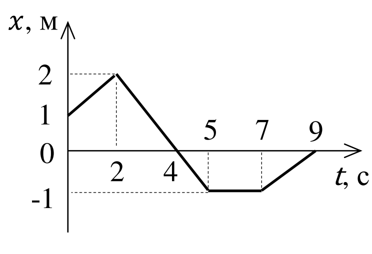
$$h_1 = \frac{h_0}{3}\left(1+\frac{\rho_2+\rho_3}{\rho_1}\right), \quad h_{12} = h_{13} = \frac{h_0}{3}\left(1-\frac{\rho_2+\rho_3}{2\rho_1}\right).$$

Полная высота столба в третьем сосуде будет равна

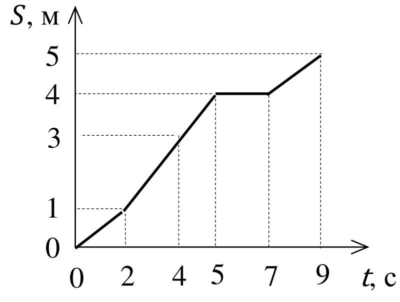
$$H_3 = h_{13} + h_3 + h_0 = \frac{h_0}{2}\left(\frac{11}{3}-\frac{\rho_3}{\rho_2}-\frac{\rho_2+\rho_3}{3\rho_1}\right).$$

7 класс

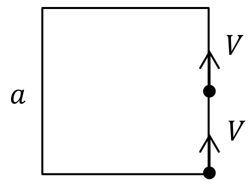
1. (25 баллов) График зависимости от времени координаты x частицы, совершающей движение вдоль оси x, приведен на рисунке. Нарисовать график зависимости пройденного частицей пути от времени.



Ответ. См. график на рисунке.



2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают движение со скоростью V по сторонам квадрата: один из вершины, другой с середины стороны (см. рис.). Через какое время расстояние между жучками достигнет минимального значения? Чему равно это значение? Длина стороны квадрата равна a.



Ответ. Минимальное расстояние равно $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ и достигается через время $\frac{3a}{4V}$.

Решение. В начале движения расстояние между жучками остается постоянным. После того, как один из жучков (верхний на рисунке) достигнет вершины квадрата, расстояние между жучками начнет уменьшаться (верхний жучок станет двигаться в сторону, а не от второго жучка, как до этого). Уменьшение расстояния продолжится до момента, когда жучки расположатся симметрично относительно вершины – на одинаковом расстоянии $a/4$ от нее. Действительно, в этот момент проекции векторов скоростей жучков на соединяющую их линию окажутся одинаковыми, т.е. скорость сближения жучков обратится в нуль. Это и означает достижение минимума расстояния (сближение меняется на удаление). Расстояние L между жучками в указанный момент находим как гипотенузу прямоугольного треугольника

$$L = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Время движения t до симметричного расположения жучков равно

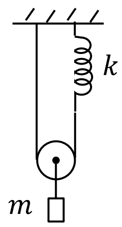
$$t = \frac{3a}{4V}.$$

3. (25 баллов) Для измерения малых масс к весам приложен набор большого числа металлических пластинок одинаковой толщины двух видов – в форме кружков радиусами 0,5 см и 1 см и колец с внутренним радиусом 0,5 см и внешним радиусом 1 см. На одну чашку весов положили два кольца. Какие пластинки следует положить на другую чашку, чтобы добиться равновесия? Укажите все возможные варианты.

Ответ. Кроме тривиального варианта с двумя другими кольцами есть еще три способа: большой кружок и два малых, кольцо и три малых кружка, шесть малых кружков.

Решение. Обозначим через m массу кружка радиусом 0,5 см. Тогда масса кружка радиусом 1 см равна $4m$, а масса кольца равна $4m - m = 3m$. Масса двух колец на чашке весов составляет, таким образом, $6m$. Эту массу, кроме тривиального варианта с двумя другими кольцами, можно набрать еще 3 способами: большой кружок ($4m$) и два малых ($m + m$), кольцо ($3m$) и три малых кружка ($m + m + m$), шесть малых кружков ($m + m + m + m + m + m$).

4. (25 баллов) В системе, состоящей из блока пренебрежимо малой массы, нити и пружины жесткости k, к оси блока подвесили груз массы m (см. рис.) На сколько при этом сместился блок? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. На $mg/(4k)$.

Решение. Из условия равновесия блока следует, что сила натяжения нити равна $mg/2$. Такой же является и упругая сила пружины. Из закона Гука следует, что удлинение пружины равно $mg\,/(2k)$, а смещение блока, следовательно, равно $mg/(4k)$.