Межрегиональная олимпиада школьников

"Будущие исследователи – будущее науки"

2022-2023 уч.г.

г.Саров, Нижегородская область

Математика

Заключительный тур

1. (20 баллов) Изобразите на координатной плоскости (x, y) множество решений системы неравенств
$$\begin{cases} |4y-3x+12| \leqslant 12 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2 \leqslant 1 \end{cases}$$
и найдите площадь полученной фигуры.

2. (20 баллов) Известно, что $\frac{\cos 3x}{\cos x} = a$. Найдите $\frac{\cos 5x}{\cos x}$.

3. (15 баллов) Винни Пух сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 55 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 1155 ступенек. Сколько бы ступенек он насчитал, спустившись вниз по неподвижному эскалатору?

4. (20 баллов) При каких значениях a уравнение
$$\log_5 x + 4(1-a^2)\log_{25x} 5 - 2 = 0$$
имеет два корня, расстояние между которыми больше $\frac{24}{5}$?

5. (25 баллов) Диагонали BC и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, $AO = 2, OC = 3$. Точка K расположена на стороне BC так, что $BK : KC = 1 : 2$, а треугольник AKD является равносторонним. Найти его площадь.

Олимпиада

№1(20). Изобразите на координатной плоскости (x, y) множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} |4y-3x+12| \leqslant 12 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

Решение:

Геометрический смысл неравенства $(|x|-4)^2+(|y|-3)^2 \leqslant 1$ - уравнение 4 кругов с центрами в точках $(4;3),(-4;-3),(-4;3),(4;-3)$ единичного радиуса.

Рассмотрим неравенство $|4y-3x+12| \leqslant 12$.

$|4y-3x+12| \leqslant 12 \Leftrightarrow -12 \leqslant 4y-3x+12 \leqslant 12 \Leftrightarrow -24+3x \leqslant 4y \leqslant 3x \Leftrightarrow \frac{3}{4}x-6 \leqslant y \leqslant \frac{3}{4}x$

Т.е. геометрический смысл - все точки области, заключенные между 2 параллельными прямыми $\frac{3}{4}x-6$ и $\frac{3}{4}x$.

Решение системы - 3 полукруга. Их площадь $S=3 \cdot \frac{\pi r^2}{2}=\frac{3\pi}{2}$

Ответ: $S=\frac{3\pi}{2}$

№2(20). Известно, что $\frac{\cos 3x}{\cos x}=a$. Найдите $\frac{\cos 5x}{\cos x}$.

Решение:

$\frac{\cos 5x}{\cos x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{2\cos 4x \cos x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\cos 5x}{\cos x}=2\cos 4x-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2\cos 4x-a$

$a=\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\cos x} \Rightarrow 4cos^2x-3=a \Leftrightarrow 2(\cos 2x+1)-3=a \Leftrightarrow 2\cos 2x=a+1 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{a+1}{2}$

$\cos 4x=2(\frac{a+1}{2})^2-1=\frac{a^2+2x-1}{2}$

Итак, $\frac{\cos 5x}{\cos x}=a^2+2a-1-a=a^2+a-1$

Ответ: $\frac{\cos 5x}{\cos x}=a^2+a-1$

№3(15). Винни Пух сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 55 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 1155 ступенек. Сколько бы ступенек он насчитал, спустившись вниз по неподвижному эскалатору?

Решение:

Пусть x - скорость Винни Пуха, y - скорость эскалатора, а длина эскалатора $S=1$.

Когда Винни Пух бежал вниз, то он насчитал $\frac{1}{x+y}=55$ ступенек.

Когда Винни Пух бежал вверх, то он насчитал $\frac{1}{x-y}=1155$ ступенек.

Чтобы узнать, сколько ступенек он насчитает, спустившись по неподвижному эскалатору, необходимо найди значение выражения $\frac{1}{x}$.

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=55, \\ \frac{1}{x-y}=1155. \end{cases} \quad \begin{cases} 1=55(x+y), \\ 1=1155(x-y). \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=\frac{1}{55}, \\ x-y=\frac{1}{1155}. \end{cases}$$

Сложим первое уравнение со вторым. $2x=\frac{1}{55}+\frac{1}{1155}=\frac{2}{105}$. Тогда $\frac{1}{x}=105$. Значит, Винни Пух насчитает 105 ступенек.

Ответ: *105 ступенек*

№4(20). При каких значениях a уравнение

$\log_5 x+4(1-a^2)\log_{25x} 5-2=0$

имеет два корня, расстояние между которыми больше $\frac{24}{5}$?

Решение:

Допустимые значения x определяются условиями $x>0, x \neq \frac{1}{25}$.

Предполагая, что эти условия выполнены, и переходя к логарифмам по основанию 5, преобразуем уравнение исходное к виду $\log_5 x+\frac{4(1-a^2)}{2+\log_5 x}-2=0$ или $\log_5^2 x-4a^2=0$, откуда $\log_5 x=\pm 2a, x_1=5^{2a}, x_2=5^{-2a}$.

Если $a=0$, то $x_1=x_2=1$, а если $|a|=1$, то одно из чисел x_1, x_2 равно $\frac{1}{25}$. Поэтому значения $a=0, a=-1, a=1$ не удовлетворяют условия задачи.

Пусть $a \neq 0, |a| = \neq 1$, тогда исходное уравнение имеет два различных корня.

По условию $|x_1-x_2|>\frac{24}{5}$, т.е. $|5^{2a}-5^{-2a}|>\frac{24}{5}$.

Если $a \geq 0$, то $5^{2a} \geq 5^{-2a}$ и неравенство $|5^{2a}-5^{-2a}|>\frac{24}{5}$ равносильно неравенству: $5^{2a}-5^{-2a}>\frac{24}{5} \Leftrightarrow (5^{2a})^2-\frac{24}{5} \cdot 5^{2a}-1>0 \Leftrightarrow (5^{2a}-5)(5^{2a}+\frac{1}{5})>0 \Leftrightarrow 5^{2a}>5 \Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$.

Если $a<0$, то неравенство $|5^{2a}-5^{-2a}|>\frac{24}{5}$ равносильно неравенству: $5^{-2a}-5^{2a}>\frac{24}{5} \Leftrightarrow (5^{2a})^2+\frac{24}{5} \cdot 5^{2a}-1<0 \Leftrightarrow (5^{2a}+5)(5^{2a}-\frac{1}{5})<0 \Leftrightarrow 5^{2a}<\frac{1}{5} \Leftrightarrow a<-\frac{1}{2}$.

Ответ: $|a| > \frac{1}{2}, |a| \neq 1$

№5(25). Диагонали BC и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, $AO = 2, OC = 3$. Точка K расположена на стороне BC так, что $BK : KC = 1 : 2$, а треугольник AKD является равносторонним. Найти его площадь.

Решение:

Пусть E - основание перпендикуляра, опущенного из точки K на AC, $AK = a, \angle KAC = \alpha$. Тогда $\angle CAD = \frac{\pi}{3} - \alpha, AE = AK \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha$. Из равенства $OE + EC = OC = 3$ и $OE : EC = BK : KC = 1 : 2$ следует, что $OE = 1, AE = AO + OE = 3 = a\cos\alpha$. Но $\angle DAO = \frac{\pi}{3} - \alpha$ и поэтому $AO = a\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) = 2$

Из уравнения $a\cos\alpha = 3$ и $a\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) = 2$ находим $\tan\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, откуда $\cos\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}, a = \frac{3}{\cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$. Искомая площадь $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{7}{\sqrt{3}}$