

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
Финальный тур 19.01.2025

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

7 класс

- 7.1.** Коля и Оля бежали по очереди по два круга на стадионе. Коля бежал оба круга со своей максимальной скоростью, затратив 10 минут. Оля бежала первый круг со своей максимальной скоростью, а второй круг – со скоростью, на 20% меньшей, и затратила 15 минут. Найдите отношение максимальных скоростей Коли и Оли.

Ответ: 4:3. Решение. Пусть v (м/мин) – максимальная скорость Коли, u (м/мин) – максимальная скорость

Оли, S (м) – длина круговой дорожки. Тогда из условий задачи имеем: $\frac{2S}{v} = 10$ и $\frac{S}{u} + \frac{S}{0,8u} = 15$.

Отсюда $\frac{S}{v} = 5$ и $\frac{S}{u} \left(1 + \frac{5}{4}\right) = 15$. Разделив второе уравнение на первое, получим $\frac{9}{4} \cdot \frac{v}{u} = 3 \Leftrightarrow \frac{v}{u} = \frac{4}{3}$.

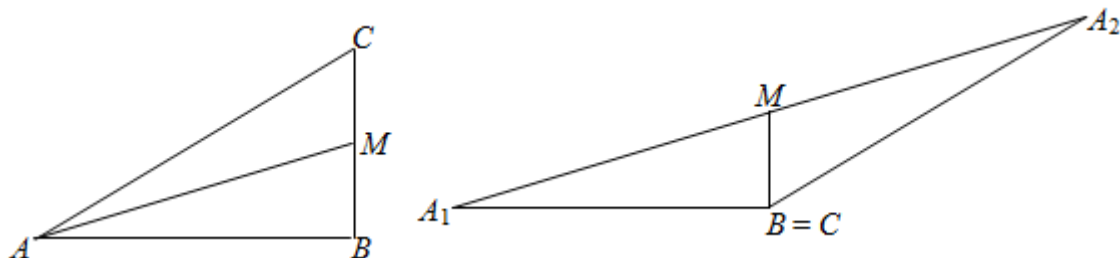
- 7.2.** Является ли простым число **а)** $3^{2025} + 2$; **б)** $5^{2025} + 8$?

Ответ: а) нет; б) нет. Решение. а) Рассмотрим степени числа 3: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, ...

Последняя цифра степени числа 3 повторяется через четыре, а именно: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1 ... Число 2025 при делении на 4 дает остаток 1 (т.к. $2025 = 4 \cdot 506 + 1$). Следовательно, последняя цифра 3^{2025} совпадает с последней цифрой 3^1 и равна 3, а поэтому число $3^{2025} + 2$ оканчивается на 5. Значит, $3^{2025} + 2$ делится на 5. **б)** Результат следует из формулы суммы кубов $5^{2025} + 8 = (5^{675})^3 + 2^3 = (5^{675} + 2)(5^{1350} - 2 \cdot 5^{675} + 4)$, т.е. число $5^{2025} + 8$ является составным, т.к. числа в обеих скобках больше единицы. *Комментарий. Результат пункта б) следует также из делимости данного числа на 7 (или на 13), т.к. остатки степеней пятёрки при делении на 7 повторяются с периодом 6 (а при делении на 13 - с периодом 4), и 2025 даёт остаток 3 при делении на 6 (и остаток 1 при делении на 4), а поэтому результат получается из делимости $125+8=133$ на 7 (и $5+8=13$ на 13).*

- 7.3.** Петя говорит Вите: "Если ты вырежешь произвольный треугольник, то я разрежу его прямым разрезом на два треугольника, а затем склею из них (по двум сторонам) новый треугольник, не равный исходному". Верно ли Петя считает, что такое построение всегда возможно?

Ответ: верно. Решение. Разрежем треугольник по медиане, проведенной из вершины меньшего угла, скажем, угла A , и составим новый треугольник таким образом, чтобы соединились половинки стороны, к которой проведена медиана AM (для этого можно треугольник ACM повернуть на 180° по часовой стрелке вокруг точки M – см. рис.). Покажем, что новый треугольник не равен исходному. В новом треугольнике стороны BM и CM склеены, так что точки B и C совпадают. Поскольку $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$, точки A_1 , M и A_2 будут лежать на одной прямой. Получим треугольник A_1A_2B ,



в котором $\angle A_1BA_2 = \angle ABM + \angle MCA$, этот угол больше любого угла треугольника ABC , и значит, треугольники ABC и A_1A_2B не равны. *Замечание. В случае прямоугольного треугольника при разрезании по медиане, проведенной из вершины прямого угла, данная конструкция даст треугольник, равный исходному, и поэтому в данном случае разрез нужно проводить по медиане из острого угла.*

- 7.4. На доске записано 10 чисел: 1, 2, ..., 10. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b , а вместо них записать числа $2a^2 + 3b^2$ и $2b^2 + 3a^2$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны 10 одинаковых чисел?

Ответ: не может. **Решение.** Легко видеть, что число $2a^2 + 3b^2$ имеет ту же четность, что b , а число, $2b^2 + 3a^2$ имеет ту же четность, что a . Действительно, разность $2a^2 + 3b^2 - b$ четна, поскольку числа $3b^2$ и b одинаковой четности (оба четны при четном b или оба нечетны при нечетном b). Аналогично, $2b^2 + 3a^2$ имеет ту же четность, что a . Поскольку вначале было 5 четных и 5 нечетных чисел, то после каждой операции на доске должно оставаться 5 четных и 5 нечетных чисел. Значит, все 10 чисел одинаковой четности получиться не могут. *Комментарий.* Отметим, что в решении существенно используется инвариант – количество четных (нечетных) чисел на доске. Если вначале на доске записаны различные числа одной четности, то в процессе могут получиться одинаковые числа (см. решение задачи 7.4 финала БИБН 2019 года: приведен пример 10 различных чисел, которые в процессе аналогичных операций $(a, b) \rightarrow (a+2b, b+2a)$ дают 10 одинаковых чисел).

- 7.5. В классе 30 человек. Оказалось, что у любых двух мальчиков различное число подруг в классе и у любых двух девочек различное число друзей среди мальчиков класса. а) Докажите, что в классе поровну мальчиков и девочек; б) обязательно ли в классе есть мальчик, у которого ровно 8 подруг?

Ответ: б) обязательно. **Решение.** а) Предположим противное и будем считать, для определенности, что мальчиков больше, чем девочек. Тогда мальчиков в классе не менее 16, а девочек – не более 14. Таким

	M1	M2	M3	...	M14	M15
D1	+	+	+		+	+
D2		+	+		+	+
D3			+		+	+
...						
D14					+	+
D15						+

образом, число подруг у мальчиков может принимать не более 15 значений (от 0 до 14). Значит, не у всех мальчиков разное число подруг. Противоречие доказывает наше утверждение. б) Если предположить противное, то число подруг у мальчиков принимает, кроме числа 8, 15 значений, а именно 0, 1, ..., 7, 9, ..., 15. Поскольку есть мальчик, у которого все 15 девочек – подруги, каждая девочка дружит хотя бы с одним мальчиком класса, и для всех девочек число мальчиков-друзей принимает все 15 значений от 1 до 15. Составим таблицу «дружб»: в клетках таблицы стоит «+», если соответствующие мальчик и девочка дружат (см. пример на рисунке). Тогда число плюсов, если считать по строкам (число друзей для девочек), получится $1+2+\dots+15 = 120$, а по столбцам $0+1+\dots+7+9+\dots+15 = 112$. Противоречие.

8 класс

- 8.1. Коля и Оля бежали по очереди по два круга на стадионе. Коля бежал оба круга со своей максимальной скоростью, затратив 10 минут. Оля бежала первый круг со своей максимальной скоростью, а второй круг – со скоростью, на 20% меньшей, и затратила 15 минут. Найдите отношение максимальных скоростей Коли и Оли.

Ответ: 4:3. **Решение.** См. задачу 7.1.

- 8.2. Одну сторону прямоугольника (ширину) увеличили на $n\%$, а другую (длину) – на $m\%$ ($n \geq m$ – положительные числа). а) На сколько процентов площадь нового прямоугольника больше площади исходного? б) Мог ли при этом периметр увеличиться более, чем на $n\%$?

Ответ: а) на $\left(m + n + \frac{mn}{100}\right)\%$, б) не мог. **Решение.** а) Пусть a – ширина, b – длина исходного

прямоугольника. Тогда стороны нового прямоугольника равны $\left(1 + \frac{n}{100}\right)a$ и $\left(1 + \frac{m}{100}\right)b$, а его площадь

$S = \left(1 + \frac{n}{100}\right)a \left(1 + \frac{m}{100}\right)b = \left(1 + \frac{m+n}{100} + \frac{mn}{10000}\right)ab$, что составляет $100\% + \left(m + n + \frac{mn}{100}\right)\%$ от площади

исходного прямоугольника. б) От противного: пусть периметр нового прямоугольника стал на $x\%$ (где $x > n$) больше исходного периметра P . Тогда $2\left(\left(1 + \frac{n}{100}\right)a + \left(1 + \frac{m}{100}\right)b\right) = 2\left(1 + \frac{x}{100}\right)(a + b)$, откуда

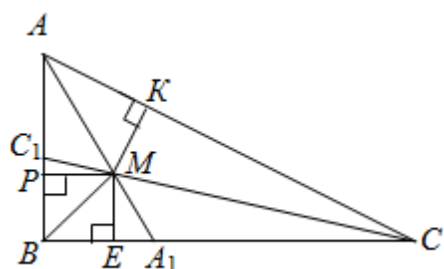
$(n-x)a = (x-m)b$. По предположению противного в левой части полученного равенства стоит отрицательное число, а в правой – положительное. Противоречие. *Замечание. Пункт б) можно решить с помощью такого неравенства: новый периметр не больше* $2\left(\left(1+\frac{n}{100}\right)a + \left(1+\frac{n}{100}\right)b\right) = \left(1+\frac{n}{100}\right)P$.

- 8.3. Можно ли 36 натуральных чисел от 1 до 36 разбить на две группы так, чтобы сумма чисел первой группы равнялась произведению чисел второй группы?

Ответ: можно. **Решение.** Сумма всех чисел от 1 до 36 равна 666. Очевидно, что во второй группе больше одного числа, так как в противном случае оно было бы равно сумме оставшихся 35 чисел, т.е. не меньше, чем $1 + 2 + \dots + 35 = 630$. Попробуем найти вторую группу из двух чисел a и b , где $a < b$. Тогда получим равенство $666 - a - b = ab$, которое приводится к виду $667 = (a+1)(b+1)$. Число 667 представимо в виде произведения двух простых чисел: $667 = 23 \cdot 29$. Так как a и b не превосходят 36, то равенство $667 = (a+1)(b+1)$ возможно только при $a = 22$, $b = 28$.

- 8.4. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M . Угол AMC равен 135° . Найдите отношение расстояния от M до вершины B к расстоянию от M до прямой AC .

Ответ: $\sqrt{2}$. **Решение.** Пусть AA_1 и CC_1 – биссектрисы треугольника ABC . Т.к. $\angle AMC = 135^\circ$, то в треугольнике AMC имеем: $\angle MAC + \angle MCA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, откуда



$\angle BAC + \angle BCA = 2(\angle MAC + \angle MCA) = 90^\circ$. Значит, $\angle ABC = 90^\circ$. Т.к. биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, то BM – биссектриса угла ABC и точка M равноудалена от сторон треугольника ABC (она является центром вписанной окружности). Опустим из точки M перпендикуляры MP , ME и MK соответственно на стороны AB , BC и AC . Тогда $MP = ME = MK$. В силу того, что $\angle ABC = \angle BPM = \angle BEM = 90^\circ$ и $MP = ME$, четырехугольник $BPME$ – квадрат, а его диагональ $BM = MP \cdot \sqrt{2}$ есть расстояние от M до вершины B . Таким образом,

$$\frac{BM}{MK} = \frac{MP\sqrt{2}}{MK} = \frac{MK\sqrt{2}}{MK} = \sqrt{2}.$$

- 8.5. В классе 30 человек. Оказалось, что у любых двух мальчиков различное число друзей в классе и у любых двух девочек различное число друзей среди мальчиков класса. а) Докажите, что в классе поровну мальчиков и девочек; б) обязательно ли в классе есть мальчик, у которого ровно 8 друзей?

Ответ: б) обязательно. **Решение.** См. задачу 7.5.

9 класс

- 9.1. Одну сторону прямоугольника (ширину) увеличили на $n\%$, а другую (длину) – на $m\%$ ($n \geq m$ – положительные числа). а) На сколько процентов площадь нового прямоугольника больше площади исходного? б) Мог ли при этом периметр увеличиться более, чем на $n\%$?

Ответ: а) на $\left(m + n + \frac{mn}{100}\right)\%$, б) не мог. **Решение.** См. задачу 8.2

- 9.2. Решите уравнение $64(x^2 + x)^3 + 1 = 0$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$. **Решение.** Запишем уравнение в виде: $(x^2 + x)^3 = (-1/4)^3$. Оно равносильно такому:

$x^2 + x = -1/4$, поскольку равенство кубов двух чисел означает равенство самих чисел. Тогда $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, т.е. $x = -\frac{1}{2}$.

9.3. Можно ли куб разбить на 2025 кубиков?

Ответ: можно. **Решение.** Рассмотрим единичный куб. Построить его разбиение можно, например, на основе равенства $2025 = 999 + 999 + 27$, а именно: разобьем сначала куб на 1000 одинаковых кубиков с ребром $1/10$, затем один из этих кубиков разобьем на 1000 кубиков с ребром $1/100$, затем один из получившихся кубиков разобьем на 27 кубиков с ребром $1/300$. Итого получим 999 кубиков с ребром $1/10$ плюс 999 кубиков с ребром $1/100$ плюс 27 кубиков с ребром $1/300$. *Комментарий.* Существуют и другие примеры разбиений. Например, после начального разбиения на 1000 кубиков, можно было взять два кубика этого разбиения и один из них разбить на 1000 кубиков, а другой – на 27. Существуют серии примеров, основанных на линейных диофантовых уравнениях $(n^3 - 1)x + (m^3 - 1)y + 1 = 2025$, где n, m – произвольные натуральные числа (от 2 до 12). При $n = 10$, $m = 3$ решение $x = 2$, $y = 1$ даёт наш пример в тексте.

9.4. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M . Угол AMC равен 135° . Найдите отношение расстояния от M до вершины B к расстоянию от M до прямой AC .

Ответ: $\sqrt{2}$. **Решение.** См. задачу 8.4.

9.5. Докажите, что 20 натуральных чисел: от 1 до 20 можно разбить на две группы так, чтобы сумма чисел первой группы равнялась произведению чисел второй. а) Какое наименьшее и б) какое наибольшее количество чисел может быть во второй группе?

Ответ: а) 3; б) 5. **Решение.** а) Сумма всех чисел от 1 до 20 равна 210. Очевидно, что во второй группе больше одного числа, так как в противном случае оно было бы равно сумме оставшихся 19 чисел, т.е. не меньше, чем $1+2+\dots+19=190$. Покажем, что на самом деле во второй группе больше двух чисел. Действительно, в противном случае для чисел a и b из второй группы выполнялось бы равенство $210 - a - b = ab$, которое приводится к виду $211 = (a+1)(b+1)$. Однако последнее уравнение не имеет решений в целых числах от 1 до 20, так как число 211 – простое. Приведем теперь пример второй группы из трёх чисел. Будем искать такой пример в наиболее простом виде, считая, что одно из искомым чисел равно 1. Тогда оставшиеся два числа найдём из равенства $209 - a - b = ab$, которое приведем к виду $210 = (a+1)(b+1)$. Последнее уравнение даёт два примера, подходящие под условие задачи: (1, 9, 20) и (1, 13, 14). б) Количество чисел во второй группе меньше шести: действительно, в противном случае их произведение было бы не меньше $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 > 210$. Пример из пяти чисел попробуем найти в виде набора (1, 2, 3, 4, x) с неизвестным x (от 5 до 20). Число x должно удовлетворять уравнению $210 - 10 - x = 24x$, т.е. $25x = 200$. Получаем решение $x = 8$, следовательно, набор (1, 2, 3, 4, 8) удовлетворяет условию задачи.

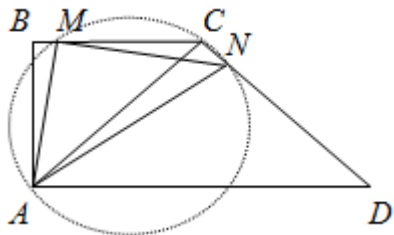
10 класс

10.1. Решите уравнение $64(x^2 + x)^3 + 1 = 0$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$. **Решение.** См. задачу 9.2.

10.2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 2$ и $BC = 1$. Боковая сторона AB , равная 1, перпендикулярна основаниям. На сторонах BC и CD взяты соответственно точки M и N такие, что $\angle MAN = 45^\circ$. Найдите все углы треугольника MAN .

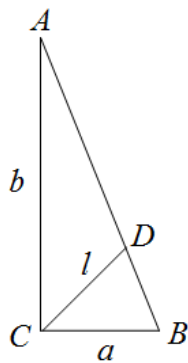
Ответ: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. **Решение.** Сначала найдем все углы трапеции. Из условия $AB \perp BC$ и равенства $AB = BC$ следует, что $\angle BCA = \angle BAC = 45^\circ$. Условие $AD = 2$ означает, что $\angle CDA = 45^\circ$ (так как если опустить высоту из точки C на основание, то образуется прямоугольный треугольник с единичными катетами). Поэтому $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 135^\circ$. Поскольку по условию $\angle MAN = 45^\circ$, то $\angle MCN + \angle MAN = 180^\circ$, т.е. четырехугольник $AMCN$ является вписанным. По свойству вписанных углов имеем: $\angle AMN = \angle ACN = 90^\circ$ и $\angle MNA = \angle MCA = 45^\circ$.



- 10.3.** Дан прямоугольный треугольник, у которого численные значения периметра и площади – числа рациональные. Обязательно ли **а)** длина гипотенузы – рациональное число? **б)** длина биссектрисы прямого угла – иррациональное число?

Ответ: **а)** обязательно; **б)** обязательно. **Решение.** **а)** Пусть P и S – периметр и площадь, соответственно, данного треугольника ABC с прямым углом C , $AC = b$, $CB = a$. Тогда $S = ab/2$. Из формулы для радиуса

вписанной окружности $r = \frac{2S}{P}$ и условий задачи следует рациональность числа r . С



другой стороны, в прямоугольном треугольнике $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{P-c}{2}$. Отсюда

$c = \frac{P}{2} - r$ – рациональное число. **б)** Пусть $CD = l$ – биссектриса прямого угла. В силу

пункта **а)** число $a+b = P-c$ рациональное. Поскольку $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$, то:

$$S = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}al \sin 45^\circ + \frac{1}{2}bl \sin 45^\circ = \frac{1}{2}l(a+b) \sin 45^\circ = \frac{1}{4}l(a+b) \cdot \sqrt{2}.$$

Если предположить, что l – число рациональное, то S будет иррациональным числом, что противоречит условию. Значит, длина биссектрисы прямого угла – иррациональное число. *Комментарий. Другое решение пункта а) получается так: пусть $x = a+b$. Тогда по теореме Пифагора $c = \sqrt{x^2 - 4S} = P - x$ и после возведения в квадрат будем иметь $x = (P^2 + 4S)/(2P)$. Значит, $c = P - x$ – рациональное число.*

- 10.4.** Сколько решений в целых числах x, y имеет уравнение $6x^2 + 2xy + y + x = 2025$?

Ответ: 8 решений. **Решение.** Выразим y из данного уравнения: $y = \frac{2025 - 6x^2 - x}{2x + 1}$. Разделив $6x^2 + x$ с

остатком на $2x + 1$, получим $6x^2 + x = (3x - 1)(2x + 1) + 1$. Таким образом, выражение для y примет вид:

$$y = \frac{2025 - (3x - 1)(2x + 1) - 1}{2x + 1} = \frac{2024}{2x + 1} - 3x + 1.$$

Это число будет целым тогда и только тогда, когда 2024 делится на $2x + 1$. Поскольку $2x + 1$ – нечетное число, а $2024 : 8 = 253 = 11 \cdot 23$, то $2x + 1$ может принимать значения делителей числа 253, а именно, четырех натуральных делителей 1, 11, 23, 253, и еще четырех отрицательных, т.е. всего получаем 8 значений.

- 10.5.** Докажите, что 20 натуральных чисел: от 1 до 20 можно разбить на две группы так, чтобы сумма чисел первой группы равнялась произведению чисел второй. **а)** Какое наименьшее и **б)** какое наибольшее количество чисел может быть во второй группе?

Ответ: **а)** 3; **б)** 5. **Решение.** См. задачу 9.5.

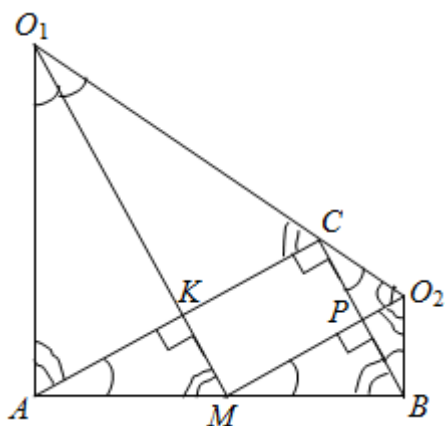
11 класс

- 11.1.** Решите уравнение $2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$. **Решение.** С помощью основного

тригонометрического тождества выразим $\cos^4 x$ через $\sin x$ и обозначим $y = \sin x$, $|y| \leq 1$. В результате этой замены получим уравнение $2y^4 - y^3 - 4y^2 + 1 = 0$. У многочлена $2y^4 - y^3 - 4y^2 + 1$ есть рациональные корни $y = -1$ и $y = 1/2$ (для подбора корней можно проверить «кандидатов»: ± 1 ; $\pm 1/2$). Тогда после деления уголком на многочлен $(y + 1)(2y - 1) = 2y^2 + y - 1$ получим уравнение $y^2 - y - 1 = 0$. Его корни $y = (1 \pm \sqrt{5})/2$, но $(1 + \sqrt{5})/2$ не удовлетворяет условию $|y| \leq 1$. Решая стандартные тригонометрические уравнения $\sin x = -1$, $\sin x = 1/2$, $\sin x = (1 - \sqrt{5})/2$, получаем ответ.

- 11.2. Дан прямоугольный треугольник ABC (C – вершина прямого угла) с острым углом α при вершине A . Две окружности с центрами O_1 и O_2 проходят через вершины A, C и B, C , соответственно, и касаются прямой AB . Найдите отношение площадей треугольников ABC и O_1MO_2 , где M – середина гипотенузы AB .



Ответ: $\sin^2 2\alpha$. **Решение.** Пусть K – середина AC , P – середина BC , тогда MK и MP – средние линии треугольника ABC , следовательно, $MK \perp AC$, $MP \perp BC$. $AO_1 = CO_1$ как радиусы окружности с центром в O_1 , значит, треугольник AO_1C – равнобедренный. Поэтому O_1K – медиана, высота и биссектриса треугольника AO_1C . Т.к. $MK \perp AC$ и $O_1K \perp AC$, то точки O_1, M и K лежат на одной прямой. Поскольку окружность с центром в O_1 касается прямой AB в точке A , то $O_1A \perp AB$. Следовательно, $\angle O_1AC = \angle O_1CA = 90^\circ - \alpha = \angle ABC$, тогда $\angle AO_1K = \angle KO_1C = \angle BAC = \alpha$. Аналогично, треугольник BO_2C – равнобедренный, точки O_2, M и P лежат на одной прямой, $O_2B \perp AB$ и острые углы в равных прямоугольных треугольниках CO_2P и BO_2P равны α и $90^\circ - \alpha$ (см. рис.). Тогда $\angle O_1CA + \angle ACB + \angle O_2CB = 90^\circ - \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$ и значит, точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой, а треугольники ABC и O_1MO_2 подобны по двум углам.

Обозначим коэффициент подобия $k = \frac{AC}{O_1M}$. Пусть $AC = b$, $BC = a$,

тогда $\operatorname{tg} \alpha = a/b$ и из прямоугольного треугольника KO_1C имеем $O_1K = 0,5b \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Тогда

$$O_1M = O_1K + KM = 0,5b \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 0,5a \quad \text{и} \quad k = \frac{AC}{O_1M} = \frac{2b}{b \cdot \operatorname{ctg} \alpha + a} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sin 2\alpha,$$

откуда $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = k^2 = \sin^2 2\alpha$.

- 11.3. Для данного треугольника ABC с соответствующими сторонами a, b, c рассматривают уравнение $ax^4 + bx = c$. Докажите, что у этого уравнения ровно два корня, они разных знаков, причем отрицательный корень по модулю больше положительного.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = ax^4 + bx - c$ и исследуем её на монотонность с помощью

производной. Имеем $f'(x) = 4ax^3 + b$ и значит, $f'(x) = 0$ при $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$. Т.к. функция $4ax^3 + b$

возрастает на $\mathbf{R}$, то $f'(x) < 0$ при $x < -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ и $f'(x) > 0$ при $x > -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$. Поэтому $f(x)$ убывает на

$(-\infty, -\sqrt[3]{b/(4a)}]$ и возрастает на $[-\sqrt[3]{b/(4a)}, +\infty)$, а значит, на каждом из этих полуинтервалов имеет

не более одного корня, т.е. уравнение $ax^4 + bx = c$ имеет не более двух корней. Поскольку $f(0) = -c < 0$ и $f(1) = a + b - c > 0$ (по неравенству треугольника), то в силу непрерывности $f(x)$, на интервале $(0; 1)$ есть корень уравнения. Далее, по неравенству треугольника, $f(-1) = a - b - c < 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$,

поэтому второй корень меньше (-1) . Итак, положительный корень уравнения меньше 1, а модуль отрицательного корня больше 1, т.е. отрицательный корень по модулю больше положительного.

Замечание. Можно было решить задачу графически, записав уравнение в виде $ax^4 = -bx + c$ и используя лишь положительность a, b, c . Существование единственного положительного корня уравнения очевидно, а для единственности отрицательного корня (формально, кроме наглядности) требуется проверить монотонность производной ax^4 (выпуклость). Сравнение корней тоже тогда очевидно из графика. Решение выше в тексте даёт более сильное сравнение с единицей (по модулю).

- 11.4. а) Определите количество положительных корней уравнения $9 \cdot x^{6x} = 1$; б) есть ли у этого уравнения отрицательные корни?

Ответ: а) 2 корня; б) нет. **Решение.** а) При $x > 0$ после логарифмирования получим уравнение, эквивалентное исходному

$$x \cdot \ln x = -\frac{\ln 3}{3} \quad (*)$$

Исследуем функцию левой части (*): $y = x \ln x \Rightarrow y' = 1 + \ln x$. Тогда

$y' > 0$ при $x > \frac{1}{e}$ и $y' < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$. Поэтому функция $y = x \ln x$

убывает на $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ и возрастает на $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$. В точке $x_0 = \frac{1}{e}$ значение

минимума $y_0 = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. Непосредственно подставляя число $x = 1/3$ в исходное уравнение (или в

(*)), убеждаемся, что это корень. Поскольку он меньше точки минимума $1/e$ и т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$,

должен быть еще ровно один корень, больший $1/e$. б) Пусть теперь $x < 0$. В этом случае выражение

x^{6x} будет определено лишь при условии, что $6x$ — число целое. Очевидно, $6x$ должно быть четным

числом (иначе $x^{6x} < 0$). Пусть $x = -\frac{k}{3}$, где k — натуральное число. Тогда $\left(\frac{k}{3}\right)^{-2k} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{k}\right)^k = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3^{k+1} = k^k \Rightarrow k = 3n$ для некоторого натурального n . Таким образом, $3^{3n+1} = (3n)^{3n} \Leftrightarrow n^{3n} = 3$.

Значение $n = 1$ последнему уравнению не удовлетворяет, а при $n \geq 2$ левая часть, очевидно, больше правой. Итак, отрицательных корней исходное уравнение не имеет.

11.5. Дан выпуклый n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ и точка M на плоскости. Пусть M_i — проекция M на прямую A_iA_{i+1} (где $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что если выполняется равенство

$$4(A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \dots + A_nM_n^2) = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \dots + A_nA_1^2,$$

то около n -угольника можно описать окружность.

Решение. Обозначим через x_i , y_i и h_i длины отрезков A_iM_i , A_iM_{i-1} и MM_i соответственно. Выражая гипотенузу A_iM в двух прямоугольных треугольниках, получим $A_iM^2 = x_i^2 + h_i^2 = y_i^2 + h_{i-1}^2$, где $h_0 = h_n$. Складывая эти равенства для всех i , получим

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2. \quad (*)$$

Далее, $x_i + y_{i+1} = A_iM_i + M_iA_{i+1} \geq A_iA_{i+1}$ для всех i , отсюда $A_iA_{i+1}^2 \leq x_i^2 + y_{i+1}^2 + 2x_iy_{i+1} \leq 2(x_i^2 + y_{i+1}^2)$, причем равенство здесь возможно лишь в случае, когда $x_i = y_{i+1}$. Складывая эти неравенства и учитывая

(*), получим $A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \dots + A_nA_1^2 \leq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$. Равенство здесь возможно лишь при условии $x_i = y_{i+1}$ для всех i , т.е. когда M проектируется в середины всех сторон n -угольника. Поэтому точка M — центр окружности, описанной около n -угольника.

