**ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2024-2025**
**Физика, II тур**

# ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

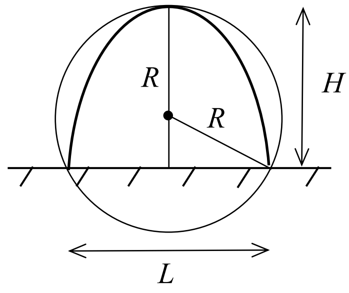
## 11 класс

**1**. (25 баллов) Тело бросили со скоростью $V_0$ под углом 45° к горизонту. Найти радиус окружности, на которой лежат точки броска и падения и высшая точка траектории. Ускорение свободного падения равно $g$.

**Ответ**. Радиус окружности равен $5V_0^2/(8g)$.

**Решение**. Как видно из рисунка, искомый радиус $R$, дальность полета тела $L$ и максимальная высота $H$ связаны соотношением (справедливым как при $H > R$, так и $H < R$)

$$(H - R)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = R^2,$$




откуда находим, что

$$R = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{8H}.$$

Принимая во внимание формулы

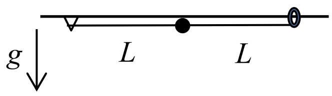
$$L = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}, \quad H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

где угол броска $\alpha = 45°$, окончательно получаем

$$R = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{4g} + \frac{V_0^2\, cos^2\,\alpha}{g} = \frac{5V_0^2}{8g}.$$

**Разбалловка.** Записано уравнение связи $R$, $L$ и $H$ – 5 баллов.
Радиус $R$ выражен через $L$ и $H$ – 5 баллов.
Записана формула для дальности полета – 5 баллов.
Записана формула для максимальной высоты подъема – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) Нить длины $2L$ одним концом закреплена на горизонтальной спице, а другим прикреплена к кольцу, которое может скользить по спице без трения. К середине нити прикреплен груз, масса которого равна массе кольца. Вначале груз удерживают у спицы так, что нить горизонтальна (см. рис.), а затем отпускают. Найти скорость кольца в момент, когда груз пройдет путь, равный $L$. Ускорение свободного падения равно $g$.




**Ответ**. Скорость кольца равна $V_к = 2\sin\alpha\sqrt{\frac{2gL\sin\alpha}{1+4\sin^2\alpha}}$, где $\alpha = 1$ рад.

**Решение**. После освобождения груза он движется по окружности радиуса $L$ с центром в точке закрепления конца нити на спице. После прохождения грузом по окружности пути, равного радиусу окружности $L$, левая на рисунке половина нити поворачивается на угол $\alpha = 1$ рад. При этом груз опускается на высоту

$$h = L\sin\alpha$$

относительно уровня спицы. Запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mV_к^2}{2} + \frac{mV_г^2}{2} + \frac{mV_в^2}{2} = mgh,$$

где $m$ – масса кольца (груза), $V_к$ – скорость кольца, а $V_г$ и $V_в$ – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости груза.

Поскольку в любой момент времени груз находится посередине между кольцом и неподвижной точкой закрепления конца нити, его координата вдоль спицы $x_г$ (отсчитываемая от точки закрепления нити) связана с координатой кольца $x_к$ соотношением $x_г = x_к/2$. Таким же соотношением связаны, очевидно, и изменения координат за небольшой промежуток времени $\Delta t$: $\Delta x_г = \Delta x_к/2$ или $\Delta x_г/\Delta t = \Delta x_к/(2\Delta t)$. Учитывая, что $\Delta x_г/\Delta t = V_г$ и $\Delta x_к/\Delta t = V_к$, получаем

$$V_г = \frac{V_к}{2}.$$

Учитывая далее, что вектор скорости груза перпендикулярен радиусу окружности, по которой груз движется, выражаем вертикальную скорость груза как

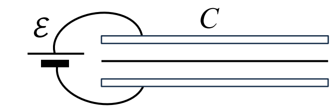
$$V_в = V_г \,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{V_к}{2}\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Подставляя найденные выражения для $V_г$ и $V_в$ в закон сохранения энергии, получаем

$$V_к = 2\sin\alpha\sqrt{\frac{2gL\sin\alpha}{1+4\sin^2\alpha}}.$$

**Разбалловка**. Записан закон сохранения энергии – 5 баллов.
Найдена высота $h$ – 5 баллов.
Найдено, что $V_г = 0{,}5V_к$ – 5 баллов.
Найдено, что $V_в = V_г \,\mathrm{ctg}\,\alpha$ – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

**3**. (25 баллов) Плоский конденсатор емкости $C$ подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. После того, как в конденсатор посередине между обкладками вставили тонкую пластину с равномерно распределенным по ней положительным зарядом (см. рис.), напряженность электрического поля в пространстве между пластиной и одной из обкладок стала равной нулю. Чему равен заряд пластины, если она имеет те же размеры, что и обкладки конденсатора? Какую работу совершила батарея при внесении пластины в конденсатор?



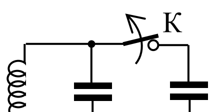

**Ответ**. Заряд пластины равен $2C\mathcal{E}$. Работа батареи равна нулю.

**Решение**. Поскольку конденсатор подключен к батарее, разность потенциалов между его обкладками остается постоянной и равной $\mathcal{E}$. До внесения пластины в конденсатор на внутренних поверхностях его обкладок находились заряды $C\mathcal{E}$ и $-C\mathcal{E}$, которые создавали в конденсаторе электрическое поле с некоторой напряженностью $E_0 = \mathcal{E}/d$, где $d$ – расстояние между обкладками. После внесения пластины разность потенциалов между обкладками равна разности потенциалов между пластиной и отрицательно заряженной (нижней на рисунке) обкладкой, расстояние между которыми равно $d/2$ (разность потенциалов между пластиной и верхней обкладкой равна нулю, т.к. между ними поля нет). Чтобы разность потенциалов осталась прежней ($\mathcal{E}$), напряженность поля между пластиной и нижней обкладкой должна стать равной $2E_0$. Вдвое большему полю соответствует вдвое больший по модулю заряд на внутренней поверхности нижней пластины, т.е. $-2C\mathcal{E}$ (все силовые линии поля заканчиваются на этом заряде, внутри металлической обкладки поля нет). Поскольку все выходящие из пластины силовые линии поля заканчиваются на нижней обкладке (над пластиной поля нет), заряд пластины равен по модулю заряду нижней обкладки, т.е. $2C\mathcal{E}$.

После внесения пластины на внешних поверхностях обкладок появятся одинаковые положительные заряды, равные $C\mathcal{E}$. Это связано с тем, что полный заряд конденсатора с пластиной равен заряду пластины (батарея может только перераспределять заряды между обкладками, не меняя их суммарного нулевого заряда). Из-за ненулевого заряды системы от нее должны симметрично расходиться силовые линии электрического поля, начинающиеся на внешних поверхностях обкладок. С учетом сказанного заряд каждой обкладки остался прежним после внесения пластины ($C\mathcal{E}$ у верхней обкладки и $-C\mathcal{E}$ у нижней). Следовательно, при внесении пластины ток через батарею не протекал, и батарея работы не совершала.

**Разбалловка**. Указаны заряды обкладок до внесения пластины – 5 баллов.
Указаны заряды на внутренних поверхностях обкладок после внесения пластины – 5 баллов.
Найден заряд пластины – 5 баллов.
Указаны заряды на внешних поверхностях пластин – 5 баллов.
Найдена работа батареи – 5 баллов.

**4.** (25 баллов) В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности и двух параллельно соединенных с помощью ключа К конденсаторов одинаковой емкости (см. рис.), происходят колебания с амплитудой тока $I_0$. В момент, когда ток через катушку равен $I_0/2$, ключ размыкают. Какой станет амплитуда колебаний тока в контуре? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.



**Ответ.** Амплитуда тока равна $I_0\sqrt{5/8}$.

**Решение.** Обозначим индуктивность катушки через $L$, а емкость конденсатора через $C$. До размыкания ключа два конденсатора эквивалентны одному емкостью $2C$. Чтобы найти суммарный заряд $q$ конденсаторов в момент размыкания, запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{LI_0^2}{2} = \frac{L(I_0/2)^2}{2} + \frac{q^2}{4C},$$

откуда получаем

$$q = I_0\sqrt{\frac{3}{2}LC}.$$

После размыкания ключа колебания будут идти в колебательном контуре с одним конденсатором емкостью $C$ при начальном заряде на конденсаторе $q/2$ и начальном токе в катушке $I_0/2$. Связывая законом сохранения энергии начальный момент и момент, когда ток в катушке достигает максимального значения $I$, а заряд конденсатора обращается в нуль, запишем

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{L(I_0/2)^2}{2} + \frac{(q/2)^2}{2C}.$$

Подставляя в записанное соотношение найденный заряд $q$, получаем

$$I = I_0\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

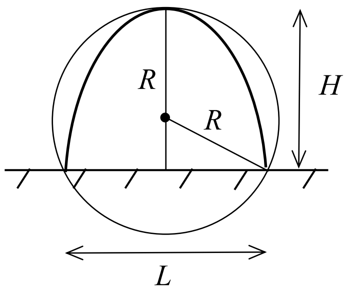
**Разбалловка.** Записан закон сохранения энергии для контура с двумя конденсаторами – 5 баллов.
Найден заряд $q$ – 5 баллов.
Записан закон сохранения энергии для контура с одним конденсатором – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

## 10 класс

**1**. (25 баллов) Тело бросили со скоростью $V_0$ под углом 45° к горизонту. Найти радиус окружности, на которой лежат точки броска и падения и высшая точка траектории. Ускорение свободного падения равно $g$.

**Ответ**. Радиус окружности равен $5V_0^2/(8g)$.

**Решение**. Как видно из рисунка, искомый радиус $R$, дальность полета тела $L$ и максимальная высота $H$ связаны соотношением (справедливым как при $H > R$, так и $H < R$)




$$(H-R)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = R^2,$$

откуда находим, что

$$R = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{8H}.$$

Принимая во внимание формулы

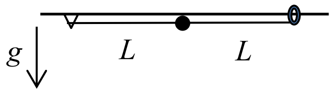
$$L = \frac{2V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g},\quad H = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g},$$

где угол броска $\alpha = 45°$, окончательно получаем

$$R = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{4g} + \frac{V_0^2\,cos^2\,\alpha}{g} = \frac{5V_0^2}{8g}.$$

**Разбалловка.** Записано уравнение связи $R$, $L$ и $H$ – 5 баллов.
Радиус $R$ выражен через $L$ и $H$ – 5 баллов.
Записана формула для дальности полета – 5 баллов.
Записана формула для максимальной высоты подъема – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) Нить длины $2L$ одним концом закреплена на горизонтальной спице, а другим прикреплена к кольцу, которое может скользить по спице без трения. К середине нити прикреплен груз, масса которого равна массе кольца. Вначале груз удерживают у спицы так, что нить горизонтальна (см. рис.), а затем отпускают. Найти скорость кольца в момент, когда груз пройдет путь, равный $L$. Найти отношение сил натяжения половин нити в этот момент. Ускорение свободного падения равно $g$.




**Ответ**. Скорость кольца равна $V_к = 2\sin\alpha\sqrt{\frac{2gL\sin\alpha}{1+4\sin^2\alpha}}$, где $\alpha = 1$ рад. Сила натяжения прикрепленной к спице половины нити в 1,5 раза больше силы натяжения половины нити, прикрепленной к кольцу.

**Решение**. После освобождения груза он движется по окружности радиуса $L$ с центром в точке закрепления конца нити на спице. После прохождения грузом по окружности пути, равного радиусу окружности $L$, левая на рисунке половина нити поворачивается на угол $\alpha = 1$ рад. При этом груз опускается на высоту

$$h = L\sin\alpha$$

относительно уровня спицы. Запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mV_к^2}{2} + \frac{mV_г^2}{2} + \frac{mV_в^2}{2} = mgh\,,$$

где $m$ – масса кольца (груза), $V_к$ – скорость кольца, а $V_г$ и $V_в$ – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости груза.

Поскольку в любой момент времени груз находится посередине между кольцом и неподвижной точкой закрепления конца нити, его координата вдоль спицы $x_г$ (отсчитываемая от точки закрепления нити) связана с координатой кольца $x_к$ соотношением $x_г = x_к/2$. Таким же соотношением связаны, очевидно, и изменения координат за небольшой промежуток времени $\Delta t$: $\Delta x_г = \Delta x_к/2$ или $\Delta x_г/\Delta t = \Delta x_к/(2\Delta t)$. Учитывая, что $\Delta x_г/\Delta t = V_г$ и $\Delta x_к/\Delta t = V_к$, получаем

$$V_г = \frac{V_к}{2}.$$

Учитывая далее, что вектор скорости груза перпендикулярен радиусу окружности, по которой груз движется, выражаем вертикальную скорость груза как

$$V_в = V_г \operatorname{ctg}\alpha = \frac{V_к}{2}\operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Подставляя найденные выражения для $V_г$ и $V_в$ в закон сохранения энергии, находим искомую скорость кольца:

$$V_к = 2\sin\alpha\sqrt{\frac{2gL\sin\alpha}{1+4\sin^2\alpha}}.$$

Поскольку горизонтальная компонента скорости груза $V_г$ вдвое меньше скорости кольца $V_к$ в каждый момент времени, то и горизонтальная компонента ускорения груза $a_г$ вдвое меньше ускорения кольца $a_к$, т.е.

$$a_г = \frac{a_к}{2}.$$

Записывая второй закон Ньютона в проекции на горизонтальное направление для груза и кольца в виде

$$ma_г = N_1\cos\alpha - N_2\cos\alpha, \quad ma_к = N_2\cos\alpha\,,$$

где $N_1$ – сила натяжения прикрепленной к спице половины нити, а $N_2$ – прикрепленной к кольцу половины нити, и учитывая связь между ускорениями, находим, что

$$N_1 = \frac{3}{2}N_2\,.$$

**Разбалловка**. Записан закон сохранения энергии с $h = L\sin\alpha$ – 5 баллов.
Найдено, что $V_г = 0{,}5V_к$ – 5 баллов.
Найдено, что $V_в = V_г\operatorname{ctg}\alpha$ – 5 баллов.
Найдена искомая скорость кольца – 5 баллов.
Найдено отношение сил натяжения – 5 баллов.

**3.** (25 баллов) В закрытой с торцов горизонтальной трубе сечением $S$ находится одноатомный газ, разделенный на две части теплонепроницаемым поршнем, который может без трения перемещаться в трубе. Давление газа равно $p$. На сколько сместится поршень, если к газу подвести количество теплоты $Q$ через левый торец и отвести такое же количество теплоты через правый? Считать, что подвод и отвод тепла ведутся одновременно, с одинаковым темпом.

**Ответ**. Поршень сместится на расстояние $\frac{2}{5}\frac{Q}{pS}$.

**Решение.**

Для начального состояния газа введем объемы его частей $V_1$ и $V_2$, количество молей газа в частях $\nu_1$ и $\nu_2$ и температуры частей $T_1$ и $T_2$. Запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для частей газа в начальном состоянии в виде

$$pV_1 = \nu_1 RT_1, \quad pV_2 = \nu_2 RT_2.$$

Складывая эти уравнения, получим

$$pV_0 = R(\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2) = \frac{2}{3}U,$$

где $V_0$ – объем сосуда ($V_0 = V_1 + V_2$) и $U = \frac{3}{2}R(\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2)$ – внутренняя энергия всего газа в начальном состоянии.

Для конечного состояния запишем уравнения Клапейрона-Менделеева в аналогичном виде (снабдив конечные значения величин штрихами)

$$p'V_1{}' = \nu_1 RT_1{}', \quad p'V_2{}' = \nu_2 RT_2{}'.$$

Складывая уравнения, получаем

$$p'V_0 = R(\nu_1 T_1{}' + \nu_2 T_2{}') = \frac{2}{3}U'.$$

Из двух полученных уравнений для всего газа следует, что

$$(p' - p)V_0 = \frac{2}{3}(U' - U).$$

Поскольку внутренняя энергия всего газа не меняется, т.е. $U' - U = 0$, то конечное давление газа ($p'$) равно начальному ($p$). Ясно также, что энергия газа остается постоянной и на промежуточных этапах процесса (тепло подводится и отводится с одинаковым темпом), следовательно, и давление остается постоянным в ходе всего процесса.

Запишем далее первый принцип термодинамики для (первой) части газа, которой передают тепло, в виде

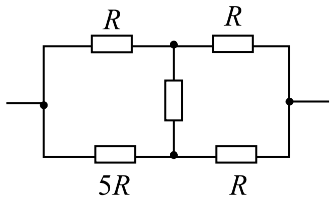
$$Q = U_1{}' - U_1 + p(V_1{}' - V_1).$$

Подставляя в данное уравнение выражения $U_1{}' - U_1 = \frac{3}{2}\nu_1 R(T_1{}' - T_1) = \frac{3}{2}\,p(V_1{}' - V_1)$ и $(V_1{}' - V_1) = Sx$, где $x$ – смещение поршня, находим, что

$$x = \frac{2}{5}\frac{Q}{pS}.$$

**Разбалловка.** Доказано, что давление постоянно в ходе процесса – 10 баллов.
Записан первый принцип термодинамики для части газа – 5 баллов.
Изменение внутренней энергии части газа записано через давление и изменение объема – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

**4.** (25 баллов) В цепи, приведенной на рисунке, даны сопротивления четырех резисторов и известно, что токи через нижние резисторы отличаются вдвое. Найти сопротивление среднего резистора.




**Ответ**. Сопротивление среднего резистора равно $R$.

**Решение**. Будем считать, что полный ток течет через цепь слева-направо. Обозначим искомое сопротивление через $R_x$, ток в левом нижнем резисторе на рисунке через $I_1$, а в левом верхнем – через $I_2$. Тогда ток в правом нижнем резисторе равен $2I_1$, а ток через средний резистор, очевидно, течет вниз и равен $I_1$. Запишем условие равенства напряжения на левом нижнем резисторе сумме напряжений на левом верхнем и среднем резисторах как

$$I_1 5R = I_2 R + I_1 R_x.$$

Запишем далее равенство напряжения на правом верхнем резисторе сумме напряжений на среднем и правом нижнем резисторах как

$$(I_2 - I_1)R = I_1 R_x + 2I_1 R.$$

Выражая из первого уравнения $I_2 R$ и подставляя полученное выражение во второе уравнение, получаем

$$R_x = R.$$

**Разбалловка**. Понято, что ток через средний резистор равен 1A – 5 баллов.
Составлено одно уравнение равенства напряжений – 5 баллов.
Составлено второе уравнение равенства напряжений – 5 баллов.
Найдено искомое сопротивление – 10 баллов.

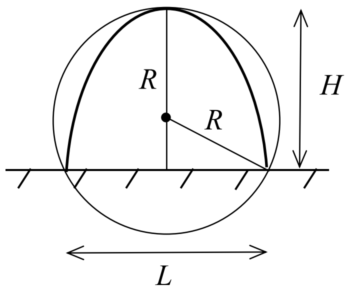
## 9 класс

**1**. (25 баллов) Тело бросили со скоростью $V_0$ под углом 45° к горизонту. Найти радиус окружности, на которой лежат точки броска и падения и высшая точка траектории. Ускорение свободного падения равно $g$.

**Ответ**. Радиус окружности равен $5V_0^2/(8g)$.

**Решение**. Как видно из рисунка, искомый радиус $R$, дальность полета тела $L$ и максимальная высота $H$ связаны соотношением (справедливым как при $H > R$, так и $H < R$)

$$(H - R)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = R^2,$$




откуда находим, что

$$R = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{8H}.$$

Принимая во внимание формулы

$$L = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}, \quad H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

где угол броска $\alpha = 45°$, окончательно получаем

$$R = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{4g} + \frac{V_0^2\, cos^2\,\alpha}{g} = \frac{5V_0^2}{8g}.$$

**Разбалловка.** Записано уравнение связи $R$, $L$ и $H$ – 5 баллов.
Радиус $R$ выражен через $L$ и $H$ – 5 баллов.
Записана формула для дальности полета – 5 баллов.
Записана формула для максимальной высоты подъема – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) Два шарика скачут вверх-вниз над горизонтальной плитой, упруго отражаясь от нее. Максимальная высота подъема шариков равна $H$. В некоторый момент шарики оказались на высоте $H/2$, имея противоположно направленные скорости. На какой одинаковой высоте они окажутся в следующий раз?

**Ответ**. На высоте $\left(\sqrt{2} - 0{,}5\right)H \approx 0{,}9H$.

**Решение**. Обозначим искомую высоту через $h$. Время движения до этой высоты частицы, имеющей направленную вверх скорость, будет складываться из времени $t_1$ подъема с высоты $H/2$ до высоты $H$ и времени $t_2$ падения с высоты $H$ до $h$. Время подъема $t_1$ равно, очевидно, времени падения с $H$ до $H/2$, т.е.

$$t_1 = \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Время падения $t_2$ равно

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}.$$

Время движения до высоты $h$ частицы, имеющей направленную вниз скорость, будет складываться из времени $t_3$ падения с высоты $H/2$ до плиты и времени $t_4$ подъема от плиты до высоты $h$. Время падения $t_3$ можно найти как разницу времен падения с высоты $H$ до плиты и с высоты $H$ до $H/2$, т.е.

$$t_3 = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Время подъема $t_4$ равно времени падения с высоты $h$ до плиты, которое можно записать как разность времен падения с $H$ до плиты и с $H$ до $h$, т.е.

$$t_4 = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}.$$

Записывая условие встречи частиц на высоте $h$ в виде $t_1 + t_2 = t_3 + t_4$ и подставляя в него выражения для времен $t_{1,2,3,4}$, приходим к уравнению

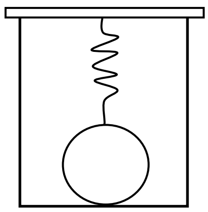
$$\sqrt{2(H-h)} = \sqrt{2H} - \sqrt{H},$$

откуда находим искомую высоту

$$h = \left(\sqrt{2} - 0{,}5\right)H \approx 0{,}9H.$$

**Разбалловка.** Записано время движения одного шарика до встречи – по 5 баллов за формулу.
Записано время движения другого шарика до встречи – по 5 баллов за формулу.
Найдена высота встречи – 5 баллов.

**3.** (25 баллов) Шар объемом 1 дм$^3$ лежит на дне пустого цилиндра, не касаясь его стенок. Верхняя точка шара соединена растянутой пружиной с перекладиной вверху цилиндра (см. рис.). В сосуд начали наливать воду. Когда уровень воды достиг середины шара, длина пружины начала меняться. Когда растяжение пружины уменьшилось вдвое, ее длина перестала меняться при дальнейшем доливе воды. С какой силой шар давил на дно пустого сосуда? Чему равна масса шара? Плотность воды равна 1000 кг/м$^3$, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с$^2$.



**Ответ**. Шар давил на дно с силой 5 Н. Масса шара равна 1,5 кг.

**Решение**. Тот факт, что длина пружины начала меняться после достижения водой уровня середины шара означает, что шар перестал давить на дно в этот момент. При этом силу реакции, действующую на шар со стороны дна, заместила сила Архимеда, равная

$$F_{\text{А}1} = \rho_{\text{в}} \frac{V}{2} g = 5\ \text{Н}$$

($\rho_{\text{в}}$ – плотность воды, $V$ – объем шара, $g$ – ускорение свободного падения). Этому значению и была, очевидно, равна сила давления шара на дно.

Запишем условие равновесия шара в тот момент, когда вода достигла уровня середины шара, в виде

$$mg = F_{\text{А}1} + F_{\text{упр}1},$$

где $m$ – масса шара, а $F_{\text{упр}1}$ – сила упругости, действующая на шар со стороны пружины. Запишем также условие равновесия шара в тот момент, когда растяжение пружины уменьшилось вдвое, в виде

$$mg = F_{\text{А}2} + F_{\text{упр}2},$$

где

$$F_{\text{упр}2} = \frac{1}{2} F_{\text{упр}1}$$

(вдвое меньшему растяжению пружины соответствует вдвое меньшая сила упругости). Из условия, что длина пружины перестает меняться, следует, что в данный момент шар оказался погруженным в воду полностью, а значит,

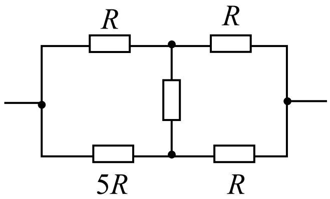
$$F_{\text{А}2} = 2F_{\text{А}1}.$$

Из записанных четырех уравнений находим, что

$$m = \frac{3F_{\text{A1}}}{g} = 1{,}5 \text{ кг}.$$

**Разбалловка**. Найдена сила давления на дно – 5 баллов.
Записаны уравнения равновесия шара для двух моментов – по 5 баллов за уравнение.
Понято, что $F_{\text{A2}} = 2F_{\text{A1}}$ – 5 баллов.
Найдена масса шара – 5 баллов.

**4.** (25 баллов) В цепи, приведенной на рисунке, даны сопротивления четырех резисторов и известно, что токи через нижние резисторы отличаются вдвое. Найти сопротивление среднего резистора.




**Ответ**. Сопротивление среднего резистора равно $R$.

**Решение**. Будем считать, что полный ток течет через цепь слева-направо. Обозначим искомое сопротивление через $R_x$, ток в левом нижнем резисторе на рисунке через $I_1$, а в левом верхнем – через $I_2$. Тогда ток в правом нижнем резисторе равен $2I_1$, а ток через средний резистор, очевидно, течет вниз и равен $I_1$. Запишем условие равенства напряжения на левом нижнем резисторе сумме напряжений на левом верхнем и среднем резисторах как

$$I_1 5R = I_2 R + I_1 R_x.$$

Запишем далее равенство напряжения на правом верхнем резисторе сумме напряжений на среднем и правом нижнем резисторах как

$$(I_2 - I_1)R = I_1 R_x + 2I_1 R.$$

Выражая из первого уравнения $I_2 R$ и подставляя полученное выражение во второе уравнение, получаем

$$R_x = R.$$

**Разбалловка**. Понято, что ток через средний резистор равен току через левый нижний – 5 баллов.
Составлено одно уравнение равенства напряжений – 5 баллов.
Составлено второе уравнение равенства напряжений – 5 баллов.
Найдено искомое сопротивление – 10 баллов.

## 8 класс

**1**. (25 баллов) Из двух металлов разной плотности изготовили две пары тел: в одной паре равны массы тел, в другой – объемы тел. В каждой паре тело, изготовленное из металла большей плотности, нагрели до 300°, менее плотное тело – до 100° и привели тела в тепловой контакт. После установления теплового равновесия конечные температуры в парах оказались равными 225° и 250°. Чему равно отношение плотностей металлов?

**Ответ**. Отношение плотностей равно 9/5 = 1,8.

**Решение**. Запишем условие теплового баланса для пары тел равной массы в виде

$$C_1 m(300° - 225°) = C_2 m(225° - 100°),$$

где через $C_1$ и $C_2$ обозначены удельные теплоемкости металлов большей и меньшей плотности соответственно, а через $m$ – массы тел. Отсюда находим, что

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{125}{75} = \frac{5}{3}.$$

Запишем теперь уравнение теплового баланса для пары тел равного объема:

$$C_1 \rho_1 V(300° - 250°) = C_2 \rho_2 V(250° - 100°),$$

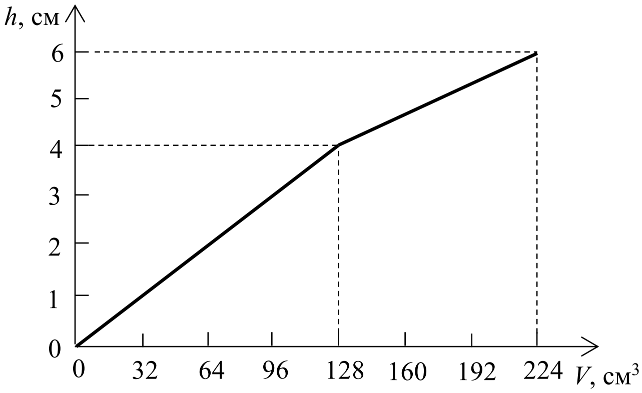
где через $\rho_1$ и $\rho_2$ обозначены плотности металлов ($\rho_1 > \rho_2$), а через $V$ равные объемы тел. С учетом соотношения $C_1/C_2 = 5/3$ находим, что

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Заметим, что приписывание конечной температуры 225° паре тел равного объема, а 250° паре тел равной массы приводит к противоречию $\rho_1 < \rho_2$.

**Разбалловка**. Найдено отношение удельных теплоемкостей – 10 баллов.
Записано уравнение для тел равного объема – 10 баллов.
Найдено отношение плотностей – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) На дно пустого цилиндрического сосуда поставили пластилиновый куб с длиной ребра 4 см и стали наливать воду. График зависимости уровня воды в сосуде $h$ от объема налитой воды $V$ приведен на рисунке. Затем из куба сделали кубики с длиной ребра 2 см, используя весь материал куба, положили их на дно того же (пустого) сосуда и снова стали наливать воду. Нарисовать график зависимости уровня воды в сосуде от объема налитой воды, считая, что воды налили столько же, что и в первом случае.



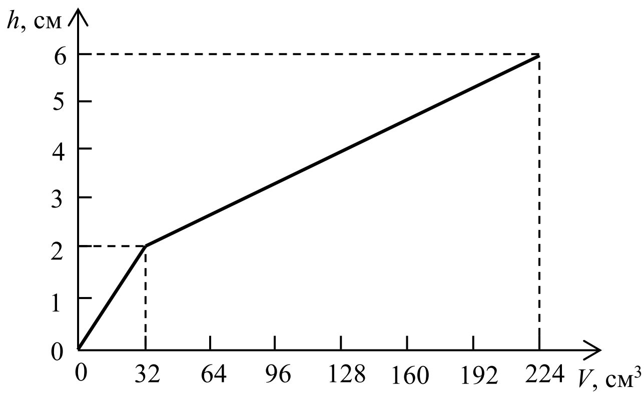

**Ответ**. См. рисунок.

**Решение**. Поскольку при изготовлении кубиков был использован весь материал куба, суммарный объем кубиков должен быть равен объему куба. Отсюда следует, что число кубиков равно 8. (Это можно понять также, мысленно разрезая куб на кубики.)

Из приведенного в условии графика найдем площадь дна сосуда. Для этого проще всего использовать участок 128–224 см$^3$, который описывает заполнение сосуда, после того, как вода достигла уровня верхней грани куба. Поделив налитый после этого момента объем воды 224 – 128 = 96 см$^3$ на толщину слоя воды над кубом 6 – 4 = 2 см, находим площадь дна 96 : 2 = 48 см$^2$. Тот же результат можно получить, используя участок графика 0–128 см$^3$. Поделив объем воды 128 см$^3$ на толщину слоя воды 4 см, находим площадь основания водяного слоя 128 : 4 = 32 см$^2$. Прибавив к этому значению площадь основания куба 16 см$^2$, находим площадь дна 32 + 16 = 48 см$^2$.

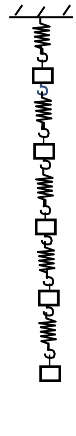
Суммарная площадь оснований 8 кубиков равна 4 · 8 = 32 см$^2$, а оставшаяся свободной площадь дна сосуда равна 48 – 32 = 16 см$^2$. Следовательно, для того, чтобы уровень воды в сосуде с 8 кубиками достиг высоты кубика (2 см), в сосуд нужно налить объем воды, равный 16 · 2 = 32 см$^3$. Ставим соответствующую точку (32 см$^3$, 2 см) на графике и соединяем ее прямой с началом координат (см. рис.).

Поскольку занимаемый 8 кубиками объем равен объему исходного куба, после наливания в сосуд всего объема воды (224 см$^3$) уровень воды окажется на том же уровне 6 см, что и в случае с кубом. Ставим соответствующую точку (224 см$^3$, 6 см) на графике и соединяем ее прямой с точкой (32 см$^3$, 2 см).




**Разбалловка**. Найдено число кубиков – 5 баллов.
Найдена площадь дна сосуда – 5 баллов.
Построен участок графика 0-32 см$^3$ – 5 баллов.
Построен участок графика 32-224 см$^3$ – 10 баллов.

**3.** (25 баллов) К штативу подвесили «гирлянду» из пяти одинаковых пружин и пяти одинаковых грузов (см. рис.). На сколько удлинилась гирлянда после подвешивания, если один груз при подвешивании на отдельной пружине растягивает ее на 1 см? Как нужно перераспределить грузы, чтобы растяжение гирлянды стало равным 10 см? Грузы можно прикреплять друг к другу и концам пружин. Нельзя прикреплять грузы непосредственно к штативу и промежуточным виткам пружин. Все грузы должны быть подвешены и все пружины растянуты.

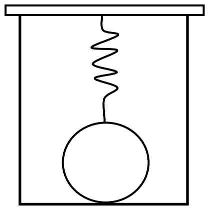


**Ответ**. Гирлянда удлинилась на 15 см. К верхней пружине нужно подвесить 3 груза, к следующей сверху пружине – 1 груз и к нижней – 1 груз.

**Решение**. Самая верхняя пружина будет растягиваться весом пяти грузов, и ее удлинение составит 5 см, следующая – весом четырех грузов, ее удлинение составит 4 см и т.д. Удлинение все гирлянды находим как 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 см.

Если к нижней пружине подвесить два груза, то удлинение гирлянды составит предельные 10 см даже без подвешивания остальных грузов. Следовательно, к нижней пружине нужно подвесить только один груз. Растяжение верхней пружины при любом расположении грузов будет равно 5 см. Рассуждая подобным образом, находим, что к верхней пружине нужно подвесить 3 груза, к следующей сверху пружине – 1 груз и к нижней – 1 груз.

**Разбалловка**. Записан закон Гука в общем виде – 5 баллов.
Найдено удлинение гирлянды – 5 баллов.
Найдено новое распределение грузов – 15 баллов.



**4.** (25 баллов) Шар объемом 1 дм$^3$ лежит на дне пустого цилиндра, не касаясь его стенок. Верхняя точка шара соединена растянутой пружиной с перекладиной вверху цилиндра (см. рис.). В сосуд начали наливать воду. Когда уровень воды достиг середины шара, длина пружины начала меняться. Когда растяжение пружины уменьшилось вдвое, ее длина перестала меняться при дальнейшем доливе воды. С какой силой шар давил на дно пустого сосуда? Чему равна масса шара? Плотность воды равна 1000 кг/м$^3$, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с$^2$.

**Ответ**. Шар давил на дно с силой 5 Н. Масса шара равна 1,5 кг.

**Решение**. Тот факт, что длина пружины начала меняться после достижения водой уровня середины шара означает, что шар перестал давить на дно в этот момент. При этом силу реакции, действующую на шар со стороны дна, заместила сила Архимеда, равная

$$F_{\text{А}1} = \rho_{\text{в}} \frac{V}{2} g = 5 \text{ Н}$$

($\rho_{\text{в}}$ – плотность воды, $V$ – объем шара, $g$ – ускорение свободного падения). Этому значению и была, очевидно, равна сила давления шара на дно.

Запишем условие равновесия шара в тот момент, когда вода достигла уровня середины шара, в виде

$$mg = F_{\text{А}1} + F_{\text{упр}1},$$

где $m$ – масса шара, а $F_{\text{упр}1}$ – сила упругости, действующая на шар со стороны пружины. Запишем также условие равновесия шара в тот момент, когда растяжение пружины уменьшилось вдвое, в виде

$$mg = F_{\text{А}2} + F_{\text{упр}2},$$

где

$$F_{\text{упр}2} = \frac{1}{2} F_{\text{упр}1}$$

(вдвое меньшему растяжению пружины соответствует вдвое меньшая сила упругости). Из условия, что длина пружины перестает меняться следует, что в данный момент шар оказался погруженным в воду полностью, а значит,

$$F_{\text{А}2} = 2F_{\text{А}1}.$$

Из записанных четырех уравнений находим, что

$$m = \frac{3F_{\text{А}1}}{g} = 1{,}5 \text{ кг}.$$

**Разбалловка**. Найдена сила давления на дно – 5 баллов.
Записаны уравнения равновесия шара для двух моментов – по 5 баллов за уравнение.
Понято, что $F_{\text{А}2} = 2F_{\text{А}1}$ – 5 баллов.
Найдена масса шара – 5 баллов.

## 7 класс

**1**. (25 баллов) Два жучка начинают ползти с одинаковыми скоростями по сторонам правильного треугольника из его вершин. Один ползет к свободной вершине, а другой – по стороне, соединяющей вершины, где сидели жучки. Найти минимальное расстояние между жучками, если сторона треугольника равна $L$.

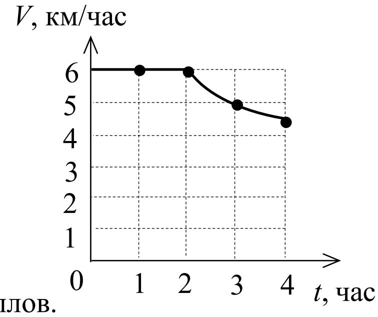
**Ответ**. Минимальное расстояние равно $L/2$.

**Решение**. Рисуя отрезки, соединяющие жучков в разные моменты времени, нетрудно понять, что минимальное расстояние между жучками достигается в тот момент, когда они находятся в серединах сторон. Треугольник, отсекаемый соединяющим жучков отрезком, подобен основному. Следовательно, длина отрезка равна $L/2$.

**Разбалловка**. Понято, что расстояние минимально, когда жучки находятся в серединах сторон – 10 баллов.
Найдено минимальное расстояние – 15 баллов.

**2**. (25 баллов) Турист двигался первые 2 часа со скоростью 6 км/час и следующие 2 часа со скоростью 3 км/час. Вычислив среднюю путевую скорость туриста за несколько интервалов времени с момента начала движения, построить примерный график зависимости средней путевой скорости от времени движения.

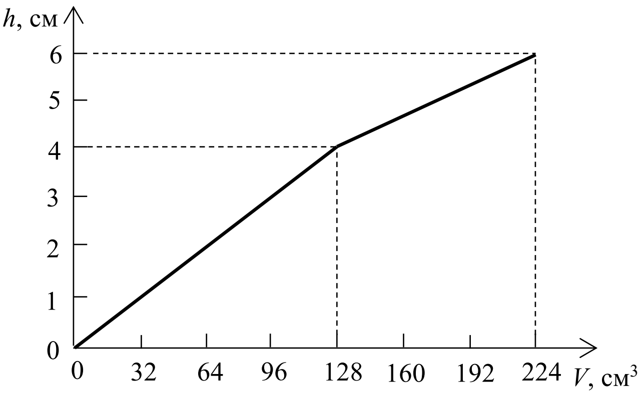
**Ответ**. См. рисунок.




**Решение**. Среднюю путевую скорость рассчитываем по формуле $V = S/t$, где $S$ – пройденный путь, а $t$ – время. Для моментов времени $t = 1, 2, 3, 4$ час находим соответствующие значения пройденного пути $S = 6, 12, 15, 18$ км и средней скорости $V = 6, 6, 5, 4{,}5$ км/час. Наносим найденные точки на график (см. рисунок).

**Разбалловка.** Записана формула для средней скорости – 5 баллов.
Найдены значения средней скорости для интервала 0-2 час – 5 баллов.
Найдены значения скорости для 3 и 4 часов – по 5 баллов за значение.
Построен график – 5 баллов.

**3**. (25 баллов) На дно пустого цилиндрического сосуда поставили пластилиновый куб с длиной ребра 4 см и стали наливать воду. График зависимости уровня воды в сосуде $h$ от объема налитой воды $V$ приведен на рисунке. Затем из куба сделали кубики с длиной ребра 2 см, используя весь материал куба, положили их на дно того же (пустого) сосуда и снова стали наливать воду. Нарисовать график зависимости уровня воды в сосуде от объема налитой воды, считая, что воды налили столько же, что и в первом случае.

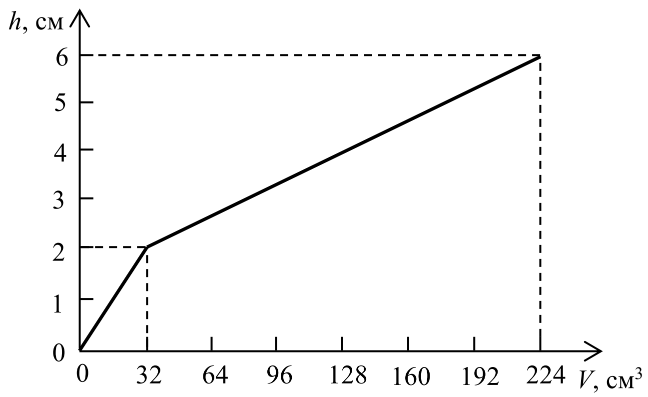



**Ответ**. См. рисунок.

**Решение**. Поскольку при изготовлении кубиков был использован весь материал куба, суммарный объем кубиков должен быть равен объему куба. Отсюда следует, что число кубиков равно 8. (Это можно понять также, мысленно разрезая куб на кубики.)

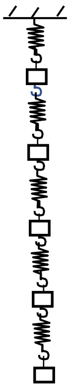
Из приведенного в условии графика найдем площадь дна сосуда. Для этого проще всего использовать участок 128–224 см$^3$, который описывает заполнение сосуда после того, как вода достигла уровня верхней грани куба. Поделив налитый после этого момента объем воды 224 – 128 = 96 см$^3$ на толщину слоя воды над кубом 6 – 4 = 2 см, находим площадь дна 96 : 2 = 48 см$^2$. Тот же результат можно получить, используя участок графика 0–128 см$^3$. Поделив объем воды 128 см$^3$ на толщину слоя воды 4 см, находим площадь основания водяного слоя 128 : 4 = 32 см$^2$. Прибавив к этому значению площадь основания куба 16 см$^2$, находим площадь дна 32 + 16 = 48 см$^2$.

Суммарная площадь оснований 8 кубиков равна 4 · 8 = 32 см$^2$, а оставшаяся свободной площадь дна сосуда равна 48 – 32 = 16 см$^2$. Следовательно, для того, чтобы уровень воды в сосуде с 8 кубиками достиг высоты кубика (2 см), в сосуд нужно налить объем воды, равный 16 · 2 = 32 см$^3$. Ставим соответствующую точку (32 см$^3$, 2 см) на графике и соединяем ее прямой с началом координат (см. рис.).




Поскольку занимаемый 8 кубиками объем равен объему исходного куба, после наливания в сосуд всего объема воды (224 см$^3$) уровень воды окажется на том же уровне 6 см, что и в случае с кубом. Ставим соответствующую точку (224 см$^3$, 6 см) на графике и соединяем ее прямой с точкой (32 см$^3$, 2 см).

**Разбалловка**. Найдено число кубиков – 5 баллов.
Найдена площадь дна сосуда – 5 баллов.
Построен участок графика 0-32 см$^3$ – 5 баллов.
Построен участок графика 32-224 см$^3$ – 10 баллов.



**4.** (25 баллов) К штативу подвесили «гирлянду» из пяти одинаковых пружин и пяти одинаковых грузов (см. рис.). На сколько удлинилась гирлянда после подвешивания, если один груз при подвешивании на отдельной пружине растягивает ее на 1 см? Как нужно перераспределить грузы, чтобы растяжение гирлянды стало равным 10 см? Грузы можно прикреплять друг к другу и концам пружин. Нельзя прикреплять грузы непосредственно к штативу и промежуточным виткам пружин. Все грузы должны быть подвешены и все пружины растянуты.

**Ответ**. Гирлянда удлинилась на 15 см. К верхней пружине нужно подвесить 3 груза, к следующей сверху пружине – 1 груз и к нижней – 1 груз.

**Решение**. Самая верхняя пружина будет растягиваться весом пяти грузов, и ее удлинение составит 5 см, следующая – весом четырех грузов, ее удлинение составит 4 см и т.д. Удлинение всей гирлянды находим как 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 см.

Если к нижней пружине подвесить два груза, то удлинение гирлянды составит предельные 10 см даже без подвешивания остальных грузов. Следовательно, к нижней пружине нужно подвесить только один груз. Растяжение верхней пружины при любом расположении грузов будет равно 5 см. Рассуждая подобным образом, находим, что к верхней пружине нужно подвесить 3 груза, к следующей сверху пружине – 1 груз и к нижней – 1 груз.

**Разбалловка**. Записан закон Гука в общем виде – 5 баллов.
Найдено удлинение гирлянды – 5 баллов.
Найдено новое распределение грузов – 15 баллов.