Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки». 2025-26. Математика. Финальный тур, вариант 2.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

10 класс

10.1. Существуют ли удовлетворяющие уравнению $2x^2 + 3y^2 + 1 = 5xy$ **а)** действительные числа x, y; **б)** натуральные числа x, y?

Ответ: а) существуют; **б)** существуют. **Решение. а)** Уравнение $2x^2 - 5xy + 3y^2 + 1 = 0$ рассмотрим как квадратное относительно x. Его дискриминант равен $D = 25y^2 - 8(3y^2 + 1) = y^2 - 8$. Поэтому $D \geq 0$ при $|y| \geq 8$ и, значит, уравнение имеет действительные корни, а исходному уравнению удовлетворяют пары чисел (бесконечное множество) x, y. **б)** Преобразуем уравнение, выделив множители: $2x^2 - 2xy - 3xy + 3y^2 = -1$; или $2x(x - y) - 3y(x - y) = -1$. Имеем . $(2x - 3y)(x - y) = -1$. Так как x и y – натуральные, то $2x - 3y$ и $x - y$ – целые. Разложение (–1) в виде произведения двух целых чисел приводит к следующим двум системам: 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x - y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ x - y = 1. \end{cases}$ Решение первой системы (–4;–3) – числа не натуральные, решением второй системы является пара $x = 4$, $y = 3$. *Комментарий. Пункт* ***б)*** *можно было также решить, исходя (в силу пункта а) из уравнения в натуральных числах* $y^2 - 8 = t^2$.

10.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Точка M соединена отрезком с точкой N – серединой стороны AC. Оказалось, что площади треугольников ABM и MNC равны. Найдите отношение $\frac{AB}{AC}$.

Ответ: 1/2. **Решение.** Поскольку $S_{AMN} = S_{MNC}$ (т.к. у этих треугольников общая высоты и равные основания), то по условию имеем $S_{ABM} = S_{AMN}$. Поэтому в треугольниках ABM и AMN высоты, проведенные из вершин B и N равны. Из равенства этих прямоугольных треугольников с данными высотами в качестве катетов и равными углами при вершине A, получим: $AB = AN$. Таким образом $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$. *Комментарий. Другой способ решения основан на свойстве биссектрисы, делящей противоположную сторону на отрезки, пропорциональные соответствующим сторонам.*

10.3. Сколько существует 8-значных натуральных чисел, которые состоят из цифр 4 и 5 и делятся на 9?

Ответ: 70. **Решение.** Воспользуемся признаком делимости на 9. Так как $8 \cdot 4 = 32$, а $8 \cdot 5 = 40$, то сумма цифр искомых чисел равна 36 (это единственное натуральное число между 32 и 40, кратное 9). Значит, искомые числа содержат по четыре цифры 4 и 5. Тогда их количество – это число способов выбора четырех мест (позиций для пятёрки) из 8, т.е. $C_8^4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4!} = 70$.

10.4. Дано натуральное число $n > 10$. Докажите, что $N = n^4 - 90n^2 - 91n - 90$ **а)** число составное; **б)** N можно представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших единицы.

Решение. а) Тот факт, что N – число составное, следует из его чётности (при условии, что $N > 2$), а чётность следует из того, что числа n^4 и $91n$ одинаковой чётности. Далее, $N = n^2\left(n^2 - 90 - \frac{91}{n} - \frac{90}{n^2}\right) > 100 \cdot (100 - 90 - 9{,}1 - 0{,}9) = 0$, и из этого же представления числа N следует, что большему значению n при $n > 10$ соответствует большее значение N. Про-

верка значения N при $n = 11$ дает $N = 2660 > 2$. **б)** Разложим N на множители: $N = n^4 - n - 90(n^2+n+1) = n(n-1)(n^2+n+1) - 90(n^2+n+1) = (n^2+n+1)(n^2-n-90) =$
$= (n^2+n+1)(n-10)(n+9)$.

10.5. В ряд встали 10 девочек и 10 мальчиков так, что слева направо стоят: девочка-мальчик-девочка-мальчик и т.д. Каждую минуту в одной (любой) паре соседей «девочка-мальчик» дети меняются местами при условии, что девочка стоит слева от мальчика. Может ли такой «обменный процесс» продолжаться больше часа?

Ответ: не может. **Решение.** Рассмотрим номера по порядку (слева направо) всех десяти мальчиков. Вначале это были все чётные числа 2, 4, 6,…, 20. Каждую минуту номер одного из мальчиков уменьшается на единицу, и пока номера мальчиков не станут равны 1, 2, 3, …, 10 (т.е. пока все мальчики не окажутся слева от всех девочек), процесс будет продолжаться. Сумма номеров мальчиков сначала была равна (2 + 4 + … + 20) = 2(1 + 2 + … + 10) = 2·55, а в конце (1 + 2 + … + 10) = 55. Значит, она уменьшится на 55. Поскольку эта сумма каждую минуту уменьшается на 1, весь процесс займет 55 минут.

11 класс

11.1. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos^2(\sqrt{2}x) + \sin^2 x = 1$.

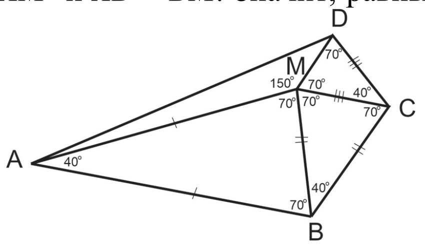
Ответ: $\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$. **Решение.** Преобразуем уравнение, используя формулы понижения степени: $\cos(2\sqrt{2}x) - \cos 2x = 0$. Разложив разность косинусов в произведение, получим

$$-2\sin\left(\sqrt{2}+1\right)x \cdot \sin\left(\sqrt{2}-1\right)x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin\left(\sqrt{2}+1\right)x = 0, \\ \sin\left(\sqrt{2}-1\right)x = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \left(\sqrt{2}-1\right)\pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ x = \left(\sqrt{2}+1\right)\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Положительные корни в обеих сериях будут при натуральных значениях k и n соответственно. Наименьший положительный корень уравнения получится из первой серии корней при $k = 1$.

11.2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него. **а**) Докажите, что если все четыре треугольника ABM, BCM, CDM и DAM равнобедренные, то среди отрезков AM, BM, CM и DM найдутся хотя бы два одинаковых. **б**) Обязательно ли среди указанных отрезков найдутся хотя бы два одинаковых, если известно, что три треугольника ABM, BCM и CDM равнобедренные?

Ответ: **б)** не обязательно. **Решение. а)** Поскольку $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360°$, то хотя бы один из этих углов неострый. Пусть, для определенности, $\angle AMB \geq 90°$. Тогда $AB > AM$ и $AB > BM$. Значит, равными сторонами в ΔAMB являются AM и BM. **б)** См. пример на рисунке: точка B получается при повороте исходного отрезка AM вокруг точки A по часовой стрелке на 40 градусов. Далее, аналогично, точка C получается при повороте отрезка BM вокруг точки B на 40 градусов, и точка D получается при повороте отрезка CM вокруг точки C на 40 градусов, Тогда три треугольника ABM, BCM и CDM равнобедренные, но $AM > BM > CM > DM$.



11.3. Сколько существует 16-значных натуральных чисел, которые состоят из цифр 7 и 8 и делятся на 9?

Ответ: 4488. **Решение.** По признаку делимости на 9 сумма цифр данных чисел делится на 9. Поскольку 16·7 = 112, а 16·8 = 128, то сумма цифр находится в промежутке между 112 и 128. В этом промежутке есть только два числа, кратные 9: это 117 и 126. Если сумма цифр равна 117, то любое из данных чисел содержит одиннадцать семёрок и пять восьмёрок: это следует из уравнения $7x+8(16–x)=117$, откуда $x=11$ –число семёрок. Количество искомых чисел равно числу способов выбора пяти позиций для восьмерок в 16-значном числе, т.е. равно $C_{16}^5 = \frac{12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16}{5!} = 4368$. Если же сумма цифр числа равна 126, то искомые числа содержат по 14 восьмёрок и две семёрки. Количество таких чисел – это число способов выбора двух мест из 16, т.е. $C_{16}^2 = \frac{15\cdot16}{2!} = 120$. Итого существует 4368 + 120 = 4488 чисел, которые состоят из цифр 7 и 8 и делятся на 9.

11.4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^{10} + y^{10} & = 1 \\ |x| + |y| & = a \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a = 2^{9/10}$; $a = 1$. **Решение.** Очевидно, множество решений системы на плоскости xOy симметрично относительно координатных осей и начала координат, поэтому достаточно рассмотреть первый квадрант. При $a \le 0$ система решений не имеет, поэтому можно считать $a > 0$ и $0 \le x \le a.$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^{10} + (a-x)^{10}$ при $x \in [0;a]$. Имеем: $f'(x) = 10(x^9 - (a-x)^9)$. Тогда $f'(x) = 0$ при $x = a/2$, причем $f'(x) < 0$ при $x < a/2$ и $f'(x) > 0$ при $x > a/2$. Значит, $f(x)$ достигает наибольшего значения a^{10} на концах отрезка $[0;a]$ и наименьшего значения $a^{10}/2^9$ – в его середине $a/2$, а любое значение между $a^{10}/2^9$ и a^{10} функция принимает в двух точках, симметричных относительно $a/2$. Из этого рассмотрения вытекает следующее:

1) если $a^{10} < 1$ или $a^{10}/2^9 > 1$, т.е. при $a < 1$ или $a > 2^{9/10}$ функция $f(x)$ не достигает значения $y = 1$, значит система решений не имеет;

2) если $1 < a < 2^{9/10}$, то $f(x)$ достигает значения 1 в двух точках внутри $[0;a]$, тогда в первом квадранте будет два решения, а на всей плоскости – восемь;

3) при $a = 1$ имеем ровно 4 решения: $(1;0),\ (-1;0),\ (0;1),\ (0;-1)$;

4) при $a = 2^{9/10}$ также имеем ровно 4 решения: $\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right),\ \left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right), \left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right),\ \left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right)$.

11.5. Рассматривается множество остроугольных треугольников, у которых длина каждой стороны не превосходит единицы. Найдите наибольшее значение радиуса **а)** описанной окружности; **б)** вписанной окружности для треугольников этого множества.

Ответ: а) $\sqrt{3}/3$; **б)** $\sqrt{3}/6$. **Решение.** Пусть в данном остроугольном треугольнике ABC радиусы описанной и вписанной окружностей равны R и r, соответственно. **а)** Рассмотрим наибольший угол, скажем, угол A. Тогда $60° \le \angle A < 90°$ и поэтому $\sin A \ge \sqrt{3}/2$ (в силу монотонности синуса в первой четверти). Поскольку $BC = 2R\sin A \ge R\sqrt{3}$, имеем: $R \le BC/\sqrt{3} \le 1/\sqrt{3}$. Для равностороннего треугольника с единичной стороной данное максимальное значение достигается. **б)** Из соотношения $S = pr$, где S – площадь, а p – полупериметр треугольника, при использовании формулы Герона и неравенства о средних следует, что $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{\sqrt{p}} \le$

$\le \frac{\sqrt{((p-a+p-b+p-c)/3)^3}}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{p^3}{27p}} = \frac{p}{3\sqrt{3}} \le \frac{3/2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Для равностороннего треугольника с единичной стороной данное максимальное значение достигается. *Комментарий. В пункте **б)** не требуется условия остроугольного треугольника*.