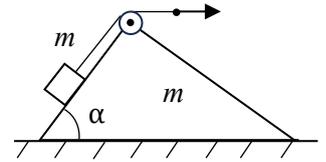


ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (30 баллов) На горизонтальной поверхности находится призма массы m с углом α при основании и на ней груз той же массы. К грузу прикреплена переброшенная через блок на вершине призмы нить, конец которой тянут в горизонтальном направлении (см. рис.). Пренебрегая трением и массами блока и нити, найти силу, с которой тянут нить, если ускорение груза направлено горизонтально. При каких значениях угла α движение с горизонтально направленным ускорением груза реализуется в режиме отрыва груза от призмы? Чему при этом равна сила натяжения нити? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Величина силы равна $F = \frac{2mg \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}$. Режим с отрывом груза реализуется при $\alpha > 60^\circ$. В этом режиме $F = \frac{2mg}{\sqrt{3}}$.

Решение. Ускорение призмы, как и ускорение груза, направлено горизонтально, в сторону действия внешней силы. Поскольку груз движется вместе с призмой, ускорения обоих тел одинаковы по величине, фактически тела движутся как одно целое. Обозначив величину ускорения тел через a , а искомую силу через F , запишем второй закон Ньютона для единого тела массы $2m$ в виде

$$2ma = F,$$

откуда выразим ускорение как $a = F/(2m)$.

Далее запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на направление вдоль наклонной плоскости призмы в виде

$$ma \cos \alpha = T - mg \sin \alpha,$$

где через T обозначена сила натяжения нити. Учитывая, что в силу невесомости нити и блока и отсутствия трения в оси блока сила T равна по величине силе F , и подставляя в последнее уравнение полученное ранее выражение для ускорения, находим искомую силу:

$$F = \frac{2mg \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}.$$

Чтобы найти значения α , при которых реализуется режим движения с отрывом груза от призмы, запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на нормальное к наклонной грани призмы направление в виде

$$ma \sin \alpha = mg \cos \alpha - N,$$

где через N обозначена сила реакции призмы. Накладывая условие отрыва груза от призмы $N = 0$, из последнего соотношения (с учетом ранее полученных выражений для a и F) получаем уравнение для угла отрыва в виде

$$\frac{\sin^2 \alpha}{2 - \cos \alpha} = \cos \alpha,$$

откуда находим, что $\cos \alpha = 1/2$, т.е. угол отрыва равен 60° . При $\alpha = 60^\circ$ сила F имеет значение

$$F = \frac{2mg}{\sqrt{3}},$$

а призма на груз не действует ($N = 0$). Такими же значения сил F и N сохраняются и при $\alpha > 60^\circ$.

Разбалловка. Понято, что ускорения груза и клина равны – 5 баллов.

Получена связь ускорения тел с внешней силой – 5 баллов.

Понято равенство сил T и F – 5 баллов.

Найдена внешняя сила – 5 баллов.

Найден угол отрыва – 5 баллов.

Найдена сила натяжения нити в режиме отрыва – 5 баллов.

2. (40 баллов) После того, как положительный точечный заряд поместили в однородное электрическое поле напряженностью E_0 в центр квадрата, одна из диагоналей которого параллельна E_0 (см. рис.), напряженность поля в одной из вершин квадрата стала равной нулю. Найти разность потенциалов между этой вершиной и серединой стороны точкой А, если длина стороны равна L .

Ответ. Разность потенциалов равна $\frac{5\sqrt{2}-4}{4}LE_0$.

Решение. После внесения заряда напряженность поля могла стать равной нулю только в вершине В (см. рис.). Обозначив величину точечного заряда через q , запишем условие равенства нулю напряженности поля в вершине В в виде

$$\frac{kq}{L^2/2} = E_0,$$

где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, ϵ_0 – электрическая постоянная и учтено, что расстояние от точечного заряда до вершины равно $L/\sqrt{2}$. Отсюда выражаем $kq = L^2E_0/2$.

Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов между точками В и А можно находить как сумму вкладов от точечного заряда и от поля E_0 . Вклад в разность потенциалов $\varphi_B - \varphi_A$ от точечного заряда записываем, используя формулу для потенциала точечного заряда $\varphi = kq/r$ (r – расстояние от заряда) и найденное выше выражение для kq , как

$$\frac{kq}{L/\sqrt{2}} - \frac{kq}{L/2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)LE_0.$$

Чтобы найти вклад в разность потенциалов $\varphi_B - \varphi_A$ от однородного поля, удобно сложить разность потенциалов, создаваемую полем E_0 между вершиной В и центром квадрата, с разностью потенциалов, создаваемой этим полем между центром квадрата и точкой А:

$$E_0 \frac{L}{\sqrt{2}} + \frac{E_0 L}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}LE_0.$$

Суммируя оба найденных вклада, окончательно находим

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{5\sqrt{2} - 4}{4}LE_0.$$

Разбалловка. Указана вершина с нулевым полем – 5 баллов.

Величина заряда выражена через E_0 – 5 баллов.

Найден вклад в разность потенциалов от точечного заряда – 10 баллов.

Найден вклад от однородного поля – 15 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

3. (30 баллов) Находящийся на гладком горизонтальном столе груз массы m прикреплен к концу пружины, другой конец которой перемещают с постоянной скоростью V вдоль стола (см. рис.). Груз совершает колебания так, что вектор его скорости относительно стола не меняет направления, а минимальное значение величины этой скорости равно нулю. Найти амплитуду колебаний механической энергии системы «груз-пружина» в связанной со столом системе отсчета.



Ответ. Амплитуда колебаний механической энергии равна .

Решение. Выберем ось x , которая связана со столом и направлена в сторону равномерного движения конца пружины. Запишем зависимость от времени t координаты груза в виде

$$x = Vt + A \cos \omega t,$$

где через ω обозначена угловая частота колебаний, а через A – амплитуда колебаний. Тогда проекцию скорости груза на ось x следует записать в виде

$$v_x = V - \omega A \sin \omega t.$$

Полученное выражение должно оставаться неотрицательным в течение всего периода изменения синуса и обращаться в нуль при максимальном значении синуса. Отсюда находим, что $\omega A = V$.

Запишем механическую энергию груза на пружине как сумму кинетической энергии груза и упругой энергии пружины:

$$W_M = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{k(\Delta L)^2}{2}.$$

Здесь через k обозначена жесткость пружины, а через ΔL ее растяжение ($\Delta L = -A \cos \omega t$). Подставляя записанное ранее выражение для v_x (с учетом $\omega A = V$), получаем

$$W_M = \frac{mV^2}{2} - mV^2 \sin \omega t + \frac{mV^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{kA^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Учитывая, что в системе отсчета, движущейся вместе с концом пружины со скоростью V , энергия колебаний постоянна, т.е.

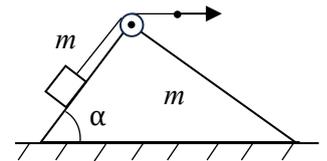
$$\frac{mV^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{kA^2}{2} \cos^2 \omega t = \text{const},$$

приходим к выводу, что W_M колеблется с амплитудой mV^2 .

Разбалловка. Понято, что амплитуда колебательной скорости равна $V - 5$ баллов.
 Записано выражение для полной скорости – 5 баллов.
 Записано выражение для механической энергии – 5 баллов.
 Использовано постоянство энергии колебаний – 10 баллов.
 Найдена искомая амплитуда – 15 баллов.

10 класс

1. (30 баллов) На горизонтальной поверхности находится призма массы m с углом α при основании и на ней груз той же массы. К грузу прикреплена переброшенная через блок на вершине призмы нить, конец которой тянут в горизонтальном направлении (см. рис.). Пренебрегая трением и массами блока и нити, найти силу, с которой тянут нить, если ускорение груза направлено горизонтально. При каких значениях угла α движение с горизонтально направленным ускорением груза реализуется в режиме отрыва груза от призмы? Чему при этом равна сила натяжения нити? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Величина силы равна $F = \frac{2mg \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}$. Режим с отрывом груза реализуется при $\alpha > 60^\circ$. В этом режиме $F = \frac{2mg}{\sqrt{3}}$.

Решение. Ускорение призмы, как и ускорение груза, направлено горизонтально, в сторону действия внешней силы. Поскольку груз движется вместе с призмой, ускорения обоих тел одинаковы по величине, фактически тела движутся как одно целое. Обозначив величину ускорения тел через a , а искомую силу через F , запишем второй закон Ньютона для единого тела массы $2m$ в виде

$$2ma = F,$$

откуда выразим ускорение как $a = F/(2m)$.

Далее запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на направление вдоль наклонной плоскости призмы в виде

$$ma \cos \alpha = T - mg \sin \alpha,$$

где через T обозначена сила натяжения нити. Учитывая, что в силу невесомости нити и блока и отсутствия трения в оси блока сила T равна по величине силе F , и подставляя в последнее уравнение полученное ранее выражение для ускорения, находим искомую силу:

$$F = \frac{2mg \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}.$$

Чтобы найти значения α , при которых реализуется режим движения с отрывом груза от призмы, запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на нормальное к наклонной грани призмы направление в виде

$$ma \sin \alpha = mg \cos \alpha - N,$$

где через N обозначена сила реакции призмы. Накладывая условие отрыва груза от призмы $N = 0$, из последнего соотношения (с учетом ранее полученных выражений для a и F) получаем уравнение для угла отрыва в виде

$$\frac{\sin^2 \alpha}{2 - \cos \alpha} = \cos \alpha,$$

откуда находим, что $\cos \alpha = 1/2$, т.е. угол отрыва равен 60° . При $\alpha = 60^\circ$ сила F имеет значение

$$F = \frac{2mg}{\sqrt{3}},$$

а призма на груз не действует ($N = 0$). Такими же значения сил F и N сохраняются и при $\alpha > 60^\circ$.

Разбалловка. Понято, что ускорения груза и клина равны – 5 баллов.

Получена связь ускорения тел с внешней силой – 5 баллов.

Понято равенство сил T и F – 5 баллов.

Найдена внешняя сила – 5 баллов.

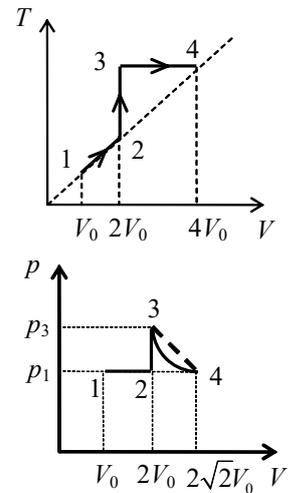
Найден угол отрыва – 5 баллов.

Найдена сила натяжения нити в режиме отрыва – 5 баллов.

2. (40 баллов) Идеальный одноатомный газ совершает процесс, график которого состоит из трех участков: 1–2, 2–3 и 3–4 (см. рис.). На каком участке полученное газом количество теплоты максимально?

Ответ. Полученное тепло максимально на участке 1-2.

Решение. Изобразим процесс на плоскости p, V , используя уравнение Клапейрона–Менделеева $pV = \nu RT$ (см. рис.). Полученное газом тепло на участке 1-2 (изобара) равно $Q_{12} = (5/2)p_1V_0$. На участке 2-3 (изохора) полученное тепло равно $Q_{23} = 3(p_3 - p_1)V_0$. Из уравнения Клапейрона–Менделеева для состояний 3 и 4 находим, что $p_3 = \sqrt{2} p_1$, поэтому $Q_{23} = 3(\sqrt{2} - 1)p_1V_0 \approx 1,2 p_1V_0$. Полученное тепло на изотермическом участке 3-4 равно совершенной газом работе, которую оценим сверху как площадь трапеции (площадь под отрезком жирной штриховой прямой): $Q_{34} = A_{34} < (p_1 + p_3)(\sqrt{2} - 1)V_0$ или $Q_{34} < p_1V_0$. Таким образом, полученное тепло максимально на участке 1-2.



Разбалловка. Изображен процесс на плоскости p, V – 10 баллов.

Записано Q_{12} – 5 баллов.

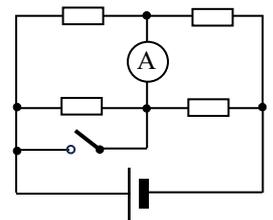
Записано Q_{23} – 10 баллов.

Записана оценка сверху на Q_{12} – 10 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

3. (30 баллов) В представленной на рисунке цепи сопротивления резисторов в верхней ветви одинаковы и вдвое больше, чем в нижней, сопротивление амперметра и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы. После того, как ключ замкнули, амперметр стал показывать ток I_A . На сколько изменился ток через батарею в результате замыкания ключа?

Ответ. Ток изменился на $1,5I_A$.



Решение. Обозначим сопротивления резисторов в нижней ветви через R , тогда в верхней ветви сопротивления равны $2R$. До замыкания ключа ток через батарею запишем в виде

$$I_1 = \frac{E}{4R/3},$$

где через E обозначена ЭДС батареи и учтено, что полное сопротивление цепи равно $4R/3$.

После замыкания ключа ток через левый верхний резистор идти не будет (резистор зашунтирован – напряжение на нем равно нулю). Следовательно, через правый верхний резистор идет ток I_A . Учтем также, что фактически два правых резистора напрямую подключены к батарее, поэтому ток через правый верхний резистор можно записать как $E/(2R)$. Тогда получаем

$$\frac{E}{2R} = I_A.$$

Записывая ток через батарею после замыкания ключа как ток через параллельно соединенные сопротивления R и $2R$, т.е. в виде

$$I_2 = \frac{E}{2R/3},$$

получаем для изменения тока через батарею выражение

$$I_2 - I_1 = \frac{3E}{4R}.$$

Учитывая ранее полученное соотношение $E/(2R) = I_A$, находим, что

$$I_2 - I_1 = \frac{3}{2}I_A.$$

Разбалловка. Записан ток через батарею до замыкания ключа – 5 баллов.

Понято, что после замыкания ключа ток через левый верхний резистор не идет – 5 баллов.

Понято, что через правый верхний резистор идет ток I_A – 5 баллов.

Записан ток через батарею после замыкания ключа – 10 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.