ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2025/26
Физика, II тур

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с земли под углом к горизонту так, что через половину времени полета оно оказалось на том же расстоянии от точки броска, что и в момент приземления. Под каким углом было брошено тело? Через какую часть времени полета тело еще раз оказывалось на том же расстоянии от точки броска?

Ответ. Угол броска определяется формулой $\sin\alpha = \sqrt{12/13}$ и примерно равен $\alpha \approx 74°$. Через $\frac{3+\sqrt{33}}{12} \approx 0{,}73$ времени полета.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 и угол броска через α, запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в произвольный момент времени t как

$$x = V_0 \cos\alpha\, t, \quad y = V_0 \sin\alpha\, t - gt^2/2,$$

а расстояние R от точки броска до тела как

$$R = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{V_0^2t^2 - V_0 \sin\alpha\, gt^3 + g^2t^4/4}.$$

Подставляя в данное выражение $t = t_п/2$, где $t_п = 2V_0 \sin\alpha/g$ – время полета, и приравнивая данное выражение к горизонтальной дальности полета $L = 2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha/g$, получаем формулу для угла броска

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{12}{13}},$$

откуда следует, что $\alpha \approx 74°$.

Теперь найдем третий момент времени, когда $R(t) = L$. Для этого удобно использовать то обстоятельство, что $L = R(t_п)$. Записывая условие $R(t) = R(t_п)$, приходим к уравнению

$$g^2(t^4 - t_п{}^4) - 4V_0 \sin\alpha\, g(t^3 - t_п{}^3) + 4V_0^2(t^2 - t_п{}^2) = 0,$$

которое определяет все моменты времени, когда удаление тела от точки броска равно горизонтальной дальности полета. После сокращения на $t - t_п$ (корень $t = t_п$ нас не интересует) приходим к кубическому уравнению, которое можно привести к виду

$$t^3 - t_п t^2 + \mathrm{ctg}^2\alpha\, t_п{}^2 t + \mathrm{ctg}^2\alpha\, t_п{}^3 = 0\,.$$

Один из корней этого уравнения $(t = t_п/2)$ известен. Чтобы найти остальные корни, поделим данный многочлен на $t - t_п/2$ и придем к квадратному уравнению

$$6t^2 - 3t_п t - t_п{}^2 = 0.$$

Записывая корни данного уравнения

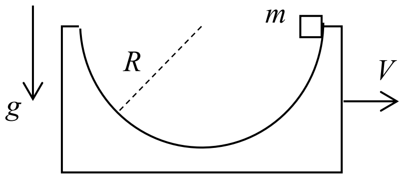
$$t_{1,2} = t_п \frac{3 \pm \sqrt{33}}{12}$$

и отбрасывая отрицательный корень как нефизичный, окончательно получаем

$$t = t_п \frac{3 + \sqrt{33}}{12} \approx 0{,}73\,.$$

Разбалловка. Записана формула для удаления тела от точки броска – 5 баллов.
Найден угол броска – 5 баллов.
Получено кубическое уравнение для t – 5 баллов.
Получено квадратное уравнение для t – 5 баллов.
Найден третий момент времени – 5 баллов.

2. (25 баллов) Брусок с выемкой в виде полуцилиндра радиуса R двигают в горизонтальном направлении со скоростью V, удерживая в верхней точке выемки кубик массы m (см. рис.). В некоторый момент кубик освобождают, продолжая двигать брусок с прежней скоростью. Какую работу совершит над кубиком сила реакции бруска к моменту, когда кубик, скользя без трения по поверхности выемки, достигнет ее нижней точки? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Сила реакции совершит работу, равную $-mV\sqrt{2gR}$.

Решение. Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся вместе с бруском. В этой системе отсчета сила реакции бруска работы не совершает (скорость кубика все время перпендикулярна силе реакции), поэтому механическая энергия кубика сохраняется. Обозначив скорость кубика в сопровождающей брусок системе отсчета в момент, когда кубик достигнет нижней точки, через v, запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} = mgR,$$

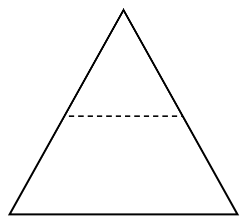
откуда получаем $v = \sqrt{2gR}$. Вернемся в неподвижную систему отсчета. В этой системе отсчета сила реакции работу совершает, и эта работа равна изменению механической энергии кубика, т.е.

$$A = \frac{m(V-v)^2}{2} - \left(\frac{mV^2}{2} + mgR\right) = -mVv = -mV\sqrt{2gR}.$$

Здесь учтено, что в нижней точке выемки скорость кубика равна по величине $|V - v|$.

Разбалловка. Найдена скорость кубика в нижней точке в движущейся системе отсчета – 5 баллов.
Записана скорость кубика в нижней точке в неподвижной системе отсчета – 5 баллов.
Работа записана через изменение механической энергии – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) По тонкой непроводящей пластинке в форме правильного треугольника равномерно распределен электрический заряд. Принимая потенциал на бесконечности равным нулю, найти, во сколько раз изменится потенциал в центре пластины, если четверть площади пластины в виде правильного треугольника (см. рис.) отрезать и удалить на бесконечность. *Указание*. Потенциал в центре заряженного треугольника пропорционален заряду треугольника и обратно пропорционален длине его стороны.

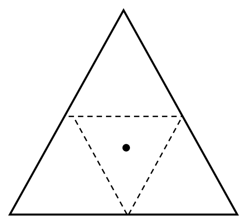


Ответ. Потенциал уменьшится в 1,2 раза.

Решение. Запишем потенциал в центре исходного треугольника в виде

$$\varphi_1 = \beta\frac{Q}{L},$$

где Q – заряд исходной треугольной пластины, L – длина ее стороны, а β – коэффициент пропорциональности, о которой говорится в указании. По принципу суперпозиции этот же потенциал можно записать как сумму вкладов от четырех треугольников со стороной $L/2$, у одного из которых центр совпадает с центром исходного треугольника, а три остальных расположены на одинаковом удалении от этого центра (см. рис.). Обозначив вклад от одного из трех последних треугольников через φ_0, запишем



$$\varphi_1 = \beta\frac{Q/4}{L/2} + 3\varphi_0\,.$$

Приравнивая записанные выражения для потенциалов, находим, что

$$\varphi_0 = \beta\frac{Q}{6L}\,.$$

После удаления части пластины потенциал в центре можно записать в виде

$$\varphi_2 = \beta \frac{Q/4}{L/2} + 2\varphi_0 .$$

Подставляя в данную формулу найденное выражение для φ_0, получаем

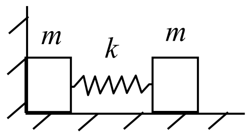
$$\varphi_2 = \beta \frac{Q/4}{L/2} + \beta \frac{Q}{3L} = \beta \frac{5Q}{6L} .$$

Окончательно, находим

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{5}{6} .$$

Разбалловка. Исходный треугольник разбит на 4 одинаковых треугольника – 5 баллов.
Записан потенциал в центре как сумма вкладов от 4 треугольников – 5 баллов.
Найден вклад φ_0 – 5 баллов.
Записан потенциал в центре как сумма вкладов от 3 треугольников – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) На гладкой горизонтальной плоскости находятся два бруска одинаковой массы m, соединенные пружиной жесткости k. Один из брусков касается вертикальной стенки (см. рис.). Другой брусок сдвинули к стенке на расстояние L и отпустили. Найти максимальное растяжение пружины. Через какое время оно будет достигнуто?



Ответ. Максимальное растяжение пружины равно $L/\sqrt{2}$. Оно будет достигнуто через время $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Решение. После того, как брусок отпустили, упругая сила сжатой пружины стала разгонять его в направлении от стенки. При этом находящийся у стенки брусок будет оставаться неподвижным до момента, пока пружина не достигнет недеформированного состояния и не начнет растягиваться. Таким образом, до этого момента в системе происходят колебания правого груза на пружине с угловой частотой $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ и периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Пружина достигнет недеформированного состояния через четверть периода колебаний, т.е. через время

$$t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Скорость правого груза v_1 в момент достижения пружиной недеформированного состояния проще всего найти, записывая закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{kL^2}{2} ,$$

откуда получаем $v_1 = L\sqrt{k/m}$.

При дальнейшем движении скорость правого груза под действием растянутой пружины будет уменьшаться, а левого – увеличиваться. При этом из-за отсутствия контакта со стенкой в системе будет выполняться закон сохранения импульса. В момент, когда пружина достигнет максимального растяжения, скорости грузов станут одинаковыми и равными $v_1/2$. Обозначив максимальное растяжение пружины через x, запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{kL^2}{2} = 2\frac{m(v_1/2)^2}{2} + \frac{kx^2}{2} ,$$

откуда получаем $x = L/\sqrt{2}$.

После отрыва левого груза от стенки движение системы можно представить как суперпозицию равномерного поступательного движения со скоростью центра масс $v_1/2$ и колебаний грузов относительно центра масс (центра пружины) с угловой частотой $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ и периодом $T_2 = 2\pi/\omega_2$. При этом максимальное растяжение пружины достигается через время t_2 от момента отрыва, равное

$$t_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} .$$

Таким образом, от начала движения до достижения максимального растяжения пружины проходит время

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} \ .$$

Разбалловка. Найдено максимальное растяжение пружины – 10 баллов.
Найдено время t_2 – 10 баллов.
Найдено время $t_1 + t_2$ – 5 баллов.

10 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с земли под углом к горизонту так, что через половину времени полета оно оказалось на том же расстоянии от точки броска, что и в момент приземления. Под каким углом было брошено тело? Через какую часть времени полета тело еще раз оказывалось на том же расстоянии от точки броска?

Ответ. Угол броска определяется формулой $\sin\alpha = \sqrt{12/13}$ и примерно равен $\alpha \ \approx 74°$. Через $\frac{3+\sqrt{33}}{12} \approx 0{,}73$ времени полета.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 и угол броска через α, запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в произвольный момент времени t как

$$x = V_0 \cos\alpha\, t, \quad y = V_0 \sin\alpha\, t - gt^2/2,$$

а расстояние R от точки броска до тела как

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \ = \sqrt{V_0^2 t^2 - V_0 \sin\alpha\, g t^3 \ + g^2 t^4/4}.$$

Подставляя в данное выражение $t = t_п/2$, где $t_п = 2V_0 \sin\alpha/g$ – время полета, и приравнивая данное выражение к горизонтальной дальности полета $L = 2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha/g$, получаем формулу для угла броска

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{12}{13}},$$

откуда следует, что $\alpha \ \approx 74°$.

Теперь найдем третий момент времени, когда $R(t) = L$. Для этого удобно использовать то обстоятельство, что $L = R(t_п)$. Записывая условие $R(t) = R(t_п)$, приходим к уравнению

$$g^2(t^4 - {t_п}^4) - 4V_0 \sin\alpha\, g(t^3 - {t_п}^3) + 4V_0^2(t^2 - {t_п}^2) = 0,$$

которое определяет все моменты времени, когда удаление тела от точки броска равно горизонтальной дальности полета. После сокращения на $t - t_п$ (корень $t = t_п$ нас не интересует) приходим к кубическому уравнению, которое можно привести к виду

$$t^3 - t_п t^2 + \mathrm{ctg}^2\alpha {t_п}^2 t + \mathrm{ctg}^2\alpha {t_п}^3 = 0\ .$$

Один из корней этого уравнения $(t = t_п/2)$ известен. Чтобы найти остальные корни, поделим данный многочлен на $t - t_п/2$ и придем к квадратному уравнению

$$6t^2 - 3t_п t - {t_п}^2 = 0.$$

Записывая корни данного уравнения

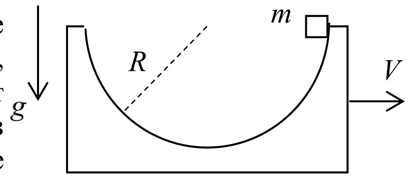
$$t_{1,2} = t_п \frac{3 \pm \sqrt{33}}{12}$$

и отбрасывая отрицательный корень как нефизичный, окончательно получаем

$$t = t_п \frac{3 + \sqrt{33}}{12} \approx 0{,}73\ .$$

Разбалловка. Записана формула для удаления тела от точки броска – 5 баллов.
Найден угол броска – 5 баллов.
Получено кубическое уравнение для t – 5 баллов.
Получено квадратное уравнение для t – 5 баллов.
Найден третий момент времени – 5 баллов.

2. (25 баллов) Брусок с выемкой в виде полуцилиндра радиуса R двигают в горизонтальном направлении со скоростью V, удерживая в верхней точке выемки кубик массы m (см. рис.). В некоторый момент кубик освобождают, продолжая двигать брусок с прежней скоростью. Какую работу совершит над кубиком сила реакции бруска к моменту, когда кубик, скользя без трения по поверхности выемки, достигнет ее нижней точки? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Сила реакции совершит работу, равную $-mV\sqrt{2gR}$.

Решение. Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся вместе с бруском. В этой системе отсчета сила реакции бруска работы не совершает (скорость кубика все время перпендикулярна силе реакции), поэтому механическая энергия кубика сохраняется. Обозначив скорость кубика в сопровождающей брусок системе отсчета в момент, когда кубик достигнет нижней точки, через v, запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} = mgR,$$

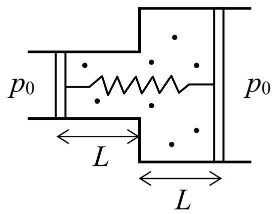
откуда получаем $v = \sqrt{2gR}$. Вернемся в неподвижную систему отсчета. В этой системе отсчета сила реакции работу совершает, и эта работа равна изменению механической энергии кубика, т.е.

$$A = \frac{m(V-v)^2}{2} - \left(\frac{mV^2}{2} + mgR\right) = -mVv = -mV\sqrt{2gR}.$$

Здесь учтено, что в нижней точке выемки скорость кубика равна по величине $|V - v|$.

Разбалловка. Найдена скорость кубика в нижней точке в движущейся системе отсчета – 5 баллов.
Записана скорость кубика в нижней точке в неподвижной системе отсчета – 5 баллов.
Работа записана через изменение механической энергии – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) В соединенных горизонтальных трубах сечений S и $2S$ могут скользить без трения поршни, связанные пружиной жесткости k и находящиеся на расстояниях L от места соединения (см. рис.). Между поршнями находится 1 моль идеального одноатомного газа. Концы труб открыты в атмосферу с давлением воздуха p_0. Какое максимальное количество теплоты можно отвести от газа без деформации пружины? Какое количество теплоты необходимо отвести, чтобы длина пружины уменьшилась вдвое?



Ответ. Без деформации пружины можно отвести количество теплоты, равное $\frac{5}{2}p_0SL$. Чтобы длина пружины уменьшилась вдвое, необходимо отвести количество теплоты, равное $5p_0SL + kL^2$.

Решение. Исходное равновесное состояние поршней возможно только в том случае, если пружина недеформирована и давление газа между поршнями равно p_0. Записывая для исходного состояния уравнение Клапейрона-Менделеева в виде

$$p_0(SL + 2SL) = RT_0,$$

(R – молярная газовая постоянная), находим начальную температуру газа

$$T_0 = \frac{3p_0SL}{R}.$$

При отводе тепла от газа изменение состояния системы будет происходить в два этапа. На первом этапе пружина остается недеформированной, давление газа остается равным p_0, а поршни смещаются влево на одинаковое расстояние. Так будет продолжаться до тех пор, пока правый поршень не упрется в место соединения. На последующем втором этапе правый поршень будет оставаться неподвижным, а левый поршень будет смещаться вправо, сжимая пружину.

Чтобы найти температуру газа в конце первого этапа T_1, запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для этого момента в виде

$$p_0 2SL = RT_1,$$

откуда получаем, что

$$T_1 = \frac{2p_0SL}{R}.$$

Найдем теперь количество теплоты Q_1, отведенное от газа на первом этапе. Для этого запишем первый принцип термодинамики в виде

$$Q_1 = p_0SL + \frac{3}{2}R(T_0 - T_1),$$

где p_0SL – работа атмосферы над газом, а $\frac{3}{2}R(T_0 - T_1)$ – убыль внутренней энергии газа. Подставляя найденный значения для T_1 и T_0, получаем

$$Q_1 = \frac{5}{2}p_0SL.$$

Перейдем к рассмотрению второго этапа. Чтобы найти давление газа в конце второго этапа p, запишем уравнение баланса сил, действующих на левый поршень в этот момент, в виде

$$p_0S = pS + kL.$$

Отсюда следует, что

$$p = p_0 - \frac{kL}{S}.$$

Теперь найдем температуру газа в конце второго этапа T_2. Для этого запишем уравнение Клапейрона-Менделеева в виде

$$pSL = RT_2,$$

откуда получаем

$$T_2 = \frac{pSL}{R} = \frac{p_0SL}{R} - \frac{kL^2}{R}.$$

Найдем теперь количество теплоты Q_2, отведенное от газа на втором этапе. Для этого запишем первый принцип термодинамики в виде

$$Q_2 = p_0SL - \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) - \frac{kL^2}{2},$$

откуда получаем

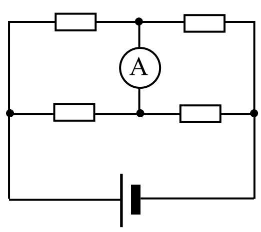
$$Q_2 = \frac{5}{2}p_0SL + kL^2.$$

Полное отведенное количество теплоты находим как $Q = Q_1 + Q_2$ и получаем

$$Q = 5p_0SL + kL^2.$$

Разбалловка. Указано, что на первом этапе давление постоянно – 5 баллов.
Найдено Q_1 – 5 баллов.
Найдено давление в конце второго этапа – 5 баллов.
Найдено Q_2 – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) В представленной на рисунке цепи сопротивления резисторов в верхней ветви одинаковы и вдвое больше, чем сопротивления в нижней, сопротивление амперметра и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы. После того, как один из резисторов в нижней ветви заменили на другой – с неизвестным номиналом, амперметр стал показывать ток I_A. На сколько при этом изменился ток через батарею?



Ответ. Ток изменился на $3I_A/2$.

Решение. Обозначим сопротивления резисторов в верхней ветви через R, ток через эти резисторы в исходной цепи через I_0, ток в левом верхнем резисторе после изменения цепи через I_1, а в правом верхнем – через I_2. Поскольку напряжение на последовательно включенных верхних резисторах остается неизменным (равным ЭДС батареи), можно записать равенство

$$I_0 R + I_0 R = I_1 R + I_2 R\,.$$

От того, какой именно из нижних резисторов заменили и увеличился или уменьшился номинал резистора, зависит только направление тока через амперметр и знак изменения тока через батарею. Для определенности будем считать, что заменили левый нижний резистор и его номинал уменьшился. В этом случае ток через амперметр потечет вверх, и можно написать соотношение

$$I_1 = I_2 - I_\text{А}\,.$$

Исключая из записанных соотношений ток I_1, получаем

$$I_2 - I_0 = \frac{I_\text{А}}{2}.$$

Теперь заметим, что в силу пренебрежимо малого сопротивления амперметра напряжения на правом верхнем и правом нижнем резисторах одинаковы и в исходной цепи, и после ее изменения. Следовательно, ток через правый нижний резистор (имеющий сопротивление $R/2$) всегда вдвое больше тока через правый верхний резистор (имеющий сопротивление R). Ток через батарею равен сумме токов через правые резисторы и составляет $3I_0$ в исходной цепи и $3I_2$ после ее изменения. Изменение тока через батарею равно $\Delta I = 3I_2 - 3I_0$ и с учетом найденной ранее разности токов $I_2 - I_0$ выражается как

$$\Delta I = \frac{3I_\text{А}}{2}.$$

Возможна несколько иная форма записи решения, в которой токи до и после изменения цепи записываются через ЭДС батареи.

Разбалловка. Использовано, что сумма напряжений на верхних резисторах постоянна – 5 баллов.
Записано соотношение $I_1 = I_2 - I_\text{А}$ или эквивалентное – 5 баллов.
Использовано, что напряжения на верхнем и нижнем резисторах одинаковы – 5 баллов.
Найдено изменение тока через батарею – 10 баллов.

9 класс

1. (25 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось в моменты t_1 и t_2 на расстояниях R_1 и R_2 от точки броска. Найти начальную скорость тела. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Начальная скорость тела равна $\sqrt{\frac{R_1^2 t_2^3 - R_2^2 t_1^3}{t_1^2 t_2^2 (t_2 - t_1)} + \frac{g^2 t_1 t_2}{4}}$.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 и угол броска через α, запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в произвольный момент времени t как

$$x = V_0 \cos\alpha\, t, \quad y = V_0 \sin\alpha\, t - gt^2/2,$$

а квадрат расстояния R^2 от точки броска до тела как

$$R^2 = x^2 + y^2 = V_0^2 t^2 - V_0 \sin\alpha\, g t^3 + g^2 t^4/4.$$

Подставляя в последнюю формулу значения $t_{1,2}$ и $R_{1,2}$, получаем два уравнения

$$R_1^2 = V_0^2 t_1^2 - V_0 \sin\alpha\, g t_1^3 + g^2 t_1^4/4, \quad R_2^2 = V_0^2 t_2^2 - V_0 \sin\alpha\, g t_2^3 + g^2 t_2^4/4\,,$$

из которых необходимо исключить неизвестный угол α. Для этого удобно поделить первое уравнение на t_1^3, второе – на t_2^3 и вычесть одно получившееся уравнение из другого. В результате получим

$$\frac{R_1^2}{t_1^3} - \frac{R_2^2}{t_2^3} = V_0^2\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) + \frac{g^2(t_1 - t_2)}{4},$$

откуда и выражаем начальную скорость как

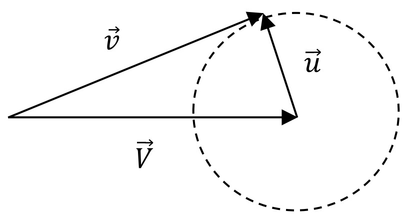
$$V_0 = \sqrt{\frac{R_1^2 t_2^3 - R_2^2 t_1^3}{t_1^2 t_2^2 (t_2 - t_1)} + \frac{g^2 t_1 t_2}{4}}.$$

Разбалловка. Записаны формулы для координат тела – 5 баллов.
Записана формула для расстояния – 5 баллов.
Составлено уравнение для нахождения V_0 (исключен угол броска) – 10 баллов.
Найдена V_0 – 5 баллов.

2. (25 баллов) На ленте транспортера, движущейся со скоростью V, бегает по окружности со скоростью u ($u < V$) жучок. Рассматривая движение жучка относительно неподвижной системы отсчета, найти скорость жучка в моменты, когда его центростремительное ускорение минимально.

Ответ. Скорость жучка равна $\sqrt{V^2 - u^2}$.

Решение. В системе отсчета, связанной с лентой транспортера, ускорение жучка $\vec{a}$ является чисто центростремительным, т.е. направленным к центру окружности и перпендикулярным вектору скорости $\vec{u}$: $\vec{a} \perp \vec{u}$. Поскольку лента движется с постоянной скоростью, ускорение жучка в неподвижной системе отсчета такое же, как и в системе отсчета ленты. В неподвижной системе отсчета минимальное значение центростремительного ускорения равно нулю и достигается в те моменты, когда вектор ускорения $\vec{a}$ направлен вдоль вектора скорости жучка $\vec{v}$ в этой системе отсчета: $\vec{a} \parallel \vec{v}$.

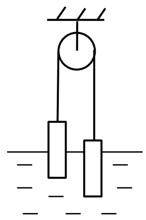


Запишем формулу пересчета скорости жучка из одной системы отсчета в другую $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$ и нарисуем соответствующий треугольник векторов (см. рис.). Движению жучка по окружности соответствует вращение вектора $\vec{u}$ на векторной диаграмме. В моменты, когда $\vec{v} \perp \vec{u}$ (см. рис.), выполняется условие $\vec{a} \parallel \vec{v}$, т.е. ускорение является чисто касательным (тангенциальным), а центростремительное ускорение равно нулю. В эти моменты

$$v = \sqrt{V^2 - u^2}.$$

Разбалловка. Указано на инвариантность ускорения – 5 баллов.
Записана формула пересчета скорости – 5 баллов.
Понята перпендикулярность скоростей $\vec{v} \perp \vec{u}$ в нужные моменты – 5 баллов.
Найдена искомая скорость – 10 баллов.

3. (25 баллов) На концах переброшенной через блок нити висят два цилиндра одинакового размера, частично погруженные в воду (см. рис.). Один цилиндр сделан из льда с плотностью 900 кг/м^3 и погружен в воду наполовину, второй – из пластика с плотностью 1300 кг/м^3. На ледяной цилиндр нанесено теплоизолирующее покрытие так, что лед может получать тепло только через нижнее основание цилиндра и таять только снизу. Какая часть пластикового цилиндра погружена в воду? На какую часть своей длины переместится пластиковый цилиндр после того, как в результате таяния льда длина ледяного цилиндра уменьшится на 40%? В каком направлении переместится пластиковый цилиндр? Какая часть льда должна растаять, чтобы пластиковый цилиндр утонул? Считать, что вода находится в широком сосуде, так что ее уровень не меняется. Плотность воды равна 1000 кг/м^3.



Ответ. Вначале пластиковый цилиндр погружен в воду на 0,9 (90%) своей длины. Пластиковый цилиндр сместится на 0,02 длины цилиндра вверх. Должно растаять 10/19 ≈ 0,53 (≈ 53%) льда, чтобы пластиковый цилиндр начал тонуть. Он полностью утонет, когда растает 2/3 ≈ 0,67 (≈ 67%) льда.

Решение. Учтем, что на каждый цилиндр со стороны нити действуют одинаковые силы, равные разности силы тяжести и силы Архимеда. Приравнивая эти разности для обоих цилиндров в начальном положении, приходим к соотношению

$$900 \cdot h - 1000 \cdot x_1 = 1300 \cdot h - 1000 \cdot x_2,$$

где через h обозначена длина цилиндра, а через x_1 и x_2 длины погруженных частей ледяного и пластикового цилиндров соответственно. Учтена также одинаковость поперечных сечений цилиндров. Из записанного соотношения с учетом того, что $x_1 = 0,5h$, находим

$$x_2 = x_1 + 0,4h = 0,9h,$$

т.е. пластиковый цилиндр погружен на 90%.

Рассмотрим теперь произвольный момент, к которому в результате таяния длина ледяного цилиндра уменьшилась на Δh, а цилиндры сместились на Δx – ледяной вниз, а пластиковый вверх. Записывая опять равенство действующих на цилиндры со стороны нити сил, приходим к соотношению

$$900 \cdot (h - \Delta h) - 1000 \cdot (0{,}5h - \Delta h + \Delta x) = 1300 \cdot h - 1000 \cdot (0{,}9h - \Delta x),$$

откуда следует, что $\Delta x = 0{,}05\Delta h$. При $\Delta h = 0{,}4h$ получаем, что $\Delta x = 0{,}02h$. Поскольку $\Delta x > 0$, то сделанное предположение о направлениях смещений цилиндров является верным.

Режим с постепенным подъемом пластикового цилиндра закончится в тот момент, когда вся оставшаяся часть ледяного цилиндра окажется над уровнем воды, т.е. при выполнении условия

$$0{,}5h - \Delta h + \Delta x = 0.$$

Подставляя сюда найденную связь $\Delta x = 0{,}05\Delta h$, получаем

$$\Delta h = \frac{10}{19}h \approx 0{,}53h.$$

При дальнейшем таянии льда пластиковый цилиндр начнет постепенно погружаться и окажется погруженным полностью в момент, когда будет выполнено условие

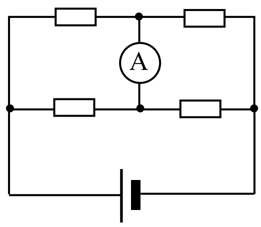
$$900 \cdot (h - \Delta h) = 1300 \cdot h - 1000 \cdot h,$$

т.е. при

$$\Delta h = \frac{2}{3}h \approx 0{,}67h.$$

Разбалловка. Найдена погруженная часть пластикового цилиндра – 5 баллов.
Найдена величина перемещения пластикового цилиндра –5 баллов.
Найдено направление перемещения пластикового цилиндра – 5 баллов.
Найдено, какая часть льда должна растаять (10/19 или 2/3) – 10 баллов.

4. (25 баллов) В представленной на рисунке цепи сопротивления резисторов в верхней ветви одинаковы и вдвое больше, чем сопротивления в нижней, сопротивление амперметра и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы. После того, как один из резисторов в нижней ветви заменили на другой – с неизвестным номиналом, амперметр стал показывать ток I_A. На сколько при этом изменился ток через батарею?



Ответ. Ток изменился на $3I_\text{A}/2$.

Решение. Обозначим сопротивления резисторов в верхней ветви через R, ток через эти резисторы в исходной цепи через I_0, ток в левом верхнем резисторе после изменения цепи через I_1, а в правом верхнем – через I_2. Поскольку напряжение на последовательно включенных верхних резисторах остается неизменным (равным ЭДС батареи), можно записать равенство

$$I_0R + I_0R = I_1R + I_2R\ .$$

От того, какой именно из нижних резисторов заменили и увеличился или уменьшился номинал резистора, зависит только направление тока через амперметр и знак изменения тока через батарею. Для определенности будем считать, что заменили левый нижний резистор и его номинал уменьшился. В этом случае ток через амперметр потечет вверх, и можно написать соотношение

$$I_1 = I_2 - I_\text{A}\ .$$

Исключая из записанных соотношений ток I_1, получаем

$$I_2 - I_0 = \frac{I_\text{A}}{2}\,.$$

Теперь заметим, что в силу пренебрежимо малого сопротивления амперметра напряжения на правом верхнем и правом нижнем резисторах одинаковы и в исходной цепи, и после ее изменения. Следовательно, ток через правый нижний резистор (имеющий сопротивление $R/2$) всегда вдвое больше тока через правый верхний резистор (имеющий сопротивление R). Ток через батарею равен сумме токов через правые резисторы и составляет $3I_0$ в исходной цепи и $3I_2$ после ее изменения. Изменение тока через батарею равно $\Delta I = 3I_2 - 3I_0$ и с учетом найденной ранее разности токов $I_2 - I_0$ выражается как

$$\Delta I = \frac{3I_\text{A}}{2}.$$

Возможна несколько иная форма записи решения, в которой токи до и после изменения цепи записываются через ЭДС батареи.

Разбалловка. Использовано, что сумма напряжений на верхних резисторах постоянна – 5 баллов.
Записано соотношение $I_1 = I_2 - I_\text{A}$ или эквивалентное – 5 баллов.
Использовано, что напряжения на верхнем и нижнем резисторах одинаковы – 5 баллов.
Найдено изменение тока через батарею – 10 баллов.

8 класс

1. (25 баллов) После того, как на дно цилиндрического сосуда, заполненного водой до высоты 10 см, поставили куб с ребром 8 см, уровень воды в сосуде поднялся до 14 см. Каким станет уровень воды в сосуде, если на первый куб поставить такой же второй? Плотность материала кубов больше плотности воды.

Ответ. Уровень воды поднимется до 18 см.

Решение. Первый куб выдавил объем воды, равный произведению площади основания куба на его высоту (8 см). Эта вода расположилась над уровнем 10 см в виде цилиндра толщиной 4 см и площадью основания, равной площади дна цилиндра. Отсюда заключаем, что площадь дна цилиндра вдвое больше площади основания куба.

Второй куб выдавит объем воды, равный произведению площади основания куба на 6 см (толщину слоя воды над первым кубом). Часть этой воды займет объем между вторым кубом и стенками сосуда (толщина этого слоя будет 2 см), а часть расположится в виде цилиндра над уровнем 16 см (над верхней гранью второго куба). Толщина цилиндра будет также 2 см. Таким образом, уровень воды в сосуде поднимется до 18 см.

Разбалловка. Понято, что площадь дна вдвое больше площади основания куба – 10 баллов.
Понято, какой объем выдавит второй куб – 5 баллов.
Получен ответ – 10 баллов.

2. (25 баллов) 2026 одинаковых тел имеют температуры, отличающиеся на 1°C, температура самого холодного равна 1°C. Какой установится температура тел после приведения их всех в тепловой контакт между собой?

Ответ. Установится температура 1013,5°C.

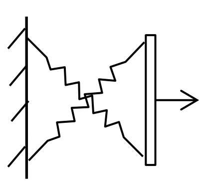
Решение. Из закона сохранения энергии следует, что установившаяся в конце температура не будет зависеть от того, в каком порядке приводить тела в тепловой контакт. Разобьем все тела на 2 группы: первая – тела с температурами от 1°C до 1013°C, вторая – тела с температурами от 1014°C до 2026°C. Тела из первой и второй групп будем приводить в тепловой контакт попарно: тело с температурой 1°C – с телом с температурой 2026°C, тело с температурой 2°C – с телом с температурой 2025°C и т.д. В каждой паре в результате теплообмена установится одна и та же температура

$$\frac{1°\text{C} + 2026°\text{C}}{2} = \frac{2°\text{C} + 2025°\text{C}}{2} = \dots = 1013{,}5°\text{C}.$$

Следовательно, после приведения всех пар в тепловой контакт между собой температура останется равной 1013,5°C.

Разбалловка. Записано уравнение теплового баланса в каком-либо виде – 5 баллов.
Указан способ разбиения тел на группы – 10 баллов.
Найдена температура пар – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) Планка длиной 1 м прикреплена к стенке двумя недеформированными пружинами, являющимися диагоналями квадрата со стороной 1 м (см. рис.). Какую силу требуется приложить к планке, чтобы отодвинуть ее от стенки на 1 см? Жесткости пружин одинаковы и равны 100 Н/м. Пружины не касаются друг друга.



Ответ. Требуется приложить силу в 1 Н.

Решение. Обозначим сторону квадрата через a ($a = 1$ м), длину недеформированной пружины через L ($L = a\sqrt{2}$), удлинение пружины через ΔL и смещение планки через x ($x = 1$ см). Чтобы найти удлинение пружины ΔL, рассмотрим прямоугольный треугольник, катетами которого являются планка и отрезок между концом планки и стенкой, а гипотенузой – растянутая пружина. По теореме Пифагора запишем

$$(L + \Delta L)^2 = a^2 + (a + x)^2,$$

откуда после возведения в квадрат и сокращений получаем

$$2L\Delta L + (\Delta L)^2 = 2ax + x^2.$$

Поделив данное соотношение на $2L$, приведем его к виду

$$\Delta L\left(1 + \frac{\Delta L}{2L}\right) = \frac{ax}{L}\left(1 + \frac{x}{2a}\right).$$

Учитывая, что вторые слагаемые в скобках малы по сравнению с единицей, например, $\frac{x}{2a} = 0{,}005$, отбросим эти слагаемые и получим

$$\Delta L = \frac{ax}{L} = \frac{x}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7 \text{ см}$$

(отсюда видно, что $\frac{\Delta L}{2L}$ еще меньше, чем $\frac{x}{2a}$, и отбрасывание было проведено корректно).

По найденному ΔL находим упругую силу пружины $F_{\text{упр}} = k\Delta L$, где через k обозначена жесткость пружины ($k = 100$ Н/м). Поскольку смещение планки $x = 1$ см мало по сравнению со стороной квадрата $a = 1$ м, можно приближенно считать, что пружина по-прежнему составляет с планкой угол 45°. Тогда действующая на планку по направлению к стенке компонента силы упругости одной пружины равна

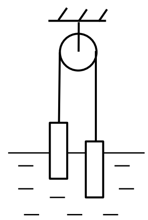
$$F_1 = \frac{k\Delta L}{\sqrt{2}} = \frac{kx}{2},$$

а полная сила со стороны двух пружин равна

$$F = 2F_1 = kx = 1 \text{ Н}.$$

Разбалловка. Составлено уравнение для нахождения удлинения пружины – 5 баллов.
Найдено удлинение пружины – 5 баллов.
Записана сила упругости пружины по закону Гука – 5 баллов.
Найдена нужная компонента силы упругости одной пружины – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) На концах переброшенной через блок нити висят два цилиндра одинакового размера, частично погруженные в воду (см. рис.). Один цилиндр сделан из льда с плотностью 900 кг/м^3 и погружен в воду наполовину, второй – из пластика с плотностью 1300 кг/м^3. На ледяной цилиндр нанесено теплоизолирующее покрытие так, что лед может получать тепло только через нижнее основание цилиндра и таять только снизу. Какая часть пластикового цилиндра погружена в воду? На какую часть своей длины переместится пластиковый цилиндр после того, как в результате таяния льда длина ледяного цилиндра уменьшится на 40%? В каком направлении переместится пластиковый цилиндр? Какая часть льда должна растаять, чтобы пластиковый цилиндр утонул? Считать, что вода находится в широком сосуде, так что ее уровень не меняется. Плотность воды равна 1000 кг/м^3.



Ответ. Вначале пластиковый цилиндр погружен в воду на 0,9 (90%) своей длины. Пластиковый цилиндр сместится на 0,02 длины цилиндра вверх. Должно растаять 10/19 ≈ 0,53 (≈ 53%) льда, чтобы пластиковый цилиндр начал тонуть. Он полностью утонет, когда растает 2/3 ≈ 0,67 (≈ 67%) льда.

Решение. Учтем, что на каждый цилиндр со стороны нити действуют одинаковые силы, равные разности силы тяжести и силы Архимеда. Приравнивая эти разности для обоих цилиндров в начальном положении, приходим к соотношению

$$900 \cdot h - 1000 \cdot x_1 = 1300 \cdot h - 1000 \cdot x_2,$$

где через h обозначена длина цилиндра, а через x_1 и x_2 длины погруженных частей ледяного и пластикового цилиндров соответственно. Учтена также одинаковость поперечных сечений цилиндров. Из записанного соотношения с учетом того, что $x_1 = 0{,}5h$, находим

$$x_2 = x_1 + 0{,}4h = 0{,}9h,$$

т.е. пластиковый цилиндр погружен на 90%.

Рассмотрим теперь произвольный момент, к которому в результате таяния длина ледяного цилиндра уменьшилась на Δh, а цилиндры сместились на Δx – ледяной вниз, а пластиковый вверх. Записывая опять равенство действующих на цилиндры со стороны нити сил, приходим к соотношению

$$900 \cdot (h - \Delta h) - 1000 \cdot (0{,}5h - \Delta h + \Delta x) = 1300 \cdot h - 1000 \cdot (0{,}9h - \Delta x),$$

откуда следует, что $\Delta x = 0{,}05\Delta h$. При $\Delta h = 0{,}4h$ получаем, что $\Delta x = 0{,}02h$. Поскольку $\Delta x > 0$, то сделанное предположение о направлениях смещений цилиндров является верным.

Режим с постепенным подъемом пластикового цилиндра закончится в тот момент, когда вся оставшаяся часть ледяного цилиндра окажется над уровнем воды, т.е. при выполнении условия

$$0{,}5h - \Delta h + \Delta x = 0.$$

Подставляя сюда найденную связь $\Delta x = 0{,}05\Delta h$, получаем

$$\Delta h = \frac{10}{19}h \approx 0{,}53h.$$

При дальнейшем таянии льда пластиковый цилиндр начнет постепенно погружаться и окажется погруженным полностью в момент, когда будет выполнено условие

$$900 \cdot (h - \Delta h) = 1300 \cdot h - 1000 \cdot h,$$

т.е. при

$$\Delta h = \frac{2}{3}h \approx 0{,}67h.$$

Разбалловка. Найдена погруженная часть пластикового цилиндра – 5 баллов.
Найдена величина перемещения пластикового цилиндра –5 баллов.
Найдено направление перемещения пластикового цилиндра – 5 баллов.
Найдено, какая часть льда должна растаять (10/19 или 2/3) – 10 баллов.

7 класс

1. (25 баллов) Два автомобиля движутся с неравными скоростями по двум шоссе к перекрестку. В некоторый момент автомобили оказались от перекрестка на одинаковом расстоянии 15 км, а в более поздний момент на одинаковом расстоянии 3 км. Найти отношение скоростей автомобилей.

Ответ. Отношение скоростей равно 1,5.

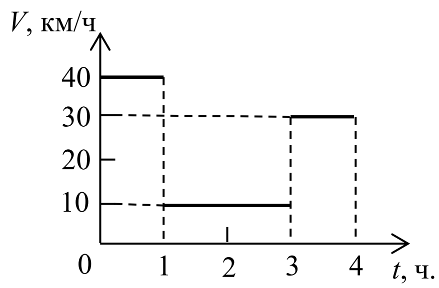
Решение. На равном расстоянии от перекрестка автомобили снова окажутся тогда, когда автомобиль с большей скоростью (обозначим ее V_1) будет за перекрестком на расстоянии 3 км от него, а автомобиль с меньшей скоростью (V_2) – перед перекрестком на том же расстоянии 3 км от него. До этого расположения автомобили движутся одинаковое время, поэтому можно составить следующее уравнение:

$$\frac{15+3}{V_1} = \frac{15-3}{V_2},$$

откуда находим, что $V_1/V_2 = 1{,}5$.

Разбалловка. Указано расположение автомобилей – 5 баллов.
Составлено уравнение – 15 баллов.
Найдено отношение скоростей – 5 баллов.

2. (25 баллов) Велосипедист двигался в течение четырех часов, его скорость V зависела от времени t так, как показано на рисунке. Найти момент t_0 такой, что средние путевые скорости велосипедиста на интервалах $0 < t < t_0$ и $t_0 < t < 4$ ч. одинаковы.



Ответ. $t_0 = 2\frac{2}{5}$ ч. или 2 ч. 24 мин.

Решение. Вначале оценим примерно, где на оси времени находится момент t_0. Взяв $t_0 = 2$ ч., получим, что средняя скорость на интервале $0 < t < 2$ (25 км/ч) больше средней скорости на интервале $2 < t < 4$ (20 км/ч). Взяв $t_0 = 3$ ч., получим, что средняя скорость на интервале $0 < t < 3$ (20 км/ч) меньше средней скорости на интервале $3 < t < 4$ (30 км/ч). Отсюда делаем вывод, что $2 < t_0 < 3$.

Обозначим $\Delta t = t_0 - 2$ и составим уравнение равенства средних скоростей на интервалах $0 < t < t_0$ и $t_0 < t < 4$ в виде

$$\frac{40 + 10(1 + \Delta t)}{2 + \Delta t} = \frac{10(1 - \Delta t) + 30}{2 - \Delta t}.$$

Решая уравнение, находим, что $\Delta t = \frac{2}{5}$ ч., т.е. 24 мин. Тогда $t_0 = 2 + \Delta t = 2\frac{2}{5}$ ч. или 2 ч. 24 мин.

Разбалловка: Понято, что $2 < t_0 < 3$ – 10 баллов.
Составлено уравнение для нахождения Δt (или непосредственно t_0) – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) После того, как на дно цилиндрического сосуда, заполненного водой до высоты 10 см, поставили куб с ребром 8 см, уровень воды в сосуде поднялся до 14 см. Каким станет уровень воды в сосуде, если на первый куб поставить такой же второй? Если на второй поставить такой же третий? Плотность материала кубов больше плотности воды.

Ответ. Уровень воды поднимется до 20 см.

Решение. Первый куб выдавил объем воды, равный произведению площади основания куба на его высоту (8 см). Эта вода расположилась над уровнем 10 см в виде цилиндра толщиной 4 см и площадью основания, равной площади дна цилиндра. Отсюда заключаем, что площадь дна цилиндра вдвое больше площади основания куба.

Второй куб выдавит объем воды, равный произведению площади основания куба на 6 см (толщину слоя воды над первым кубом). Часть этой воды займет объем между вторым кубом и стенками сосуда (толщина этого слоя будет 2 см), а часть расположится в виде цилиндра над уровнем 16 см (над верхней гранью второго куба). Толщина цилиндра будет также 2 см. Таким образом, уровень воды в сосуде поднимется до 18 см.

Третий куб выдавит объем воды, равный произведению площади основания куба на 2 см (толщину слоя воды над вторым кубом). Эта вода расположится между третьим кубом и стенками сосуда, подняв уровень воды в сосуде до 20 см.

Разбалловка. Понято, что площадь дна вдвое больше площади основания куба – 10 баллов.
Найден уровень воды после помещения в сосуд второго куба – 10 баллов.
Найден уровень воды после помещения в сосуд третьего куба – 5 баллов.

4. (25 баллов) Два куба одинакового размера массами m и $2m$ подвешены к потолку на одинаковых пружинах. Снизу поднесли параллельную потолку доску и стали перемещать ее вверх, остановив в тот момент, когда сила давления одного из кубов на доску стала в 4 раза больше силы давления другого куба. Чему равны упругие силы пружин после остановки доски? Растянуты или сжаты пружины? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Упругие силы пружин одинаковы и равны $\frac{2}{3}mg$. Пружины растянуты.

Решение. Поскольку доска параллельна потолку, то ясно, что после ее остановки длины пружин будут одинаковыми, а значит, одинаковыми будут и силы упругости пружин. Запишем условия баланса сил для обоих тел после остановки доски в виде

$$mg = N_1 + F_{\text{упр}}, \;\; 2mg = N_2 + F_{\text{упр}},$$

где через N_1 и N_2 обозначены силы реакции доски (равные силам давления кубов на доску), $F_{\text{упр}}$ – сила упругости пружины, а g – ускорение свободного падения. Учитывая, что $N_2 = 4N_1$, из записанных уравнений находим

$$F_{\text{упр}} = \frac{2}{3}mg.$$

Выше предполагалось, что после остановки доски пружины остаются растянутыми. Проверим возможность выполнения условия $N_2 = 4N_1$ в случае, когда пружины сжаты. В этом случае уравнения баланса сил примут вид

$$mg + F_{\text{упр}} = N_1, \;\; 2mg + F_{\text{упр}} = N_2,$$

откуда с учетом $N_2 = 4N_1$ следует, что

$$F_{\text{упр}} = -\frac{2}{3}mg.$$

Отрицательность полученного значения для силы говорит о том, что пружины растянуты.

Разбалловка. Указано, что силы упругости пружин одинаковы – 5 баллов.
Записан баланс сила для одного куба – 5 баллов.
Записан баланс сил для другого куба – 5 баллов.
Показано, что пружины растянуты – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.