Школьные Харитоновские Чтения
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
"БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ — БУДУЩЕЕ НАУКИ"
2025/26 УЧЕБНЫЙ ГОД.
МАТЕМАТИКА. Время выполнения 120 минут

11 КЛАСС. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. [20 баллов] Решите систему уравнений $\begin{cases}\log_x y + \log_y x = 2,\\ y^2 - x = 56.\end{cases}$

Ответ: $(8;8)$.
Решение. Так как $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$, из первого уравнения получаем $\log_x y^2 - 2\log_x y + 1 = 0$, значит, $\log_x y = 1$, $x = y$. Тогда второе уравнение системы принимает вид $x^2 - x = 56$. Отсюда $x = 8$ или $x = -7$. Второй корень не входит в область допустимых значений переменной. Система имеет единственное решение $(8;8)$.

2. [20 баллов] Решите уравнение $\sqrt{3\sin 2x - 4\cos x} + 2\cos x - 1 = 0$.
Ответ: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt{3\sin 2x - 4\cos x} = 1 - 2\cos x \iff \begin{cases}3\sin 2x - 4\cos x = 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x,\\ 1 - 2\cos x \geqslant 0.\end{cases}$$

Рассмотрим уравнение системы. Записывая $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, получаем $6\sin x\cos x = \cos^2 x + \sin^2 x + 4\cos^2 x$, откуда $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$, следовательно, $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$, $\operatorname{tg} x = 5$ или $\operatorname{tg} x = 1$.
• Если $\operatorname{tg} x = 5$, то $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, и неравенство $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ выполнено. Значит, все значения $x = \operatorname{arctg} 5 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ являются корнями уравнения.
• Если $\operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Для $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ получается, что $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$, и эти значения не являются решениями системы. Для $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ условие $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ выполняется.
Итак, $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [20 баллов] Решите неравенство $\dfrac{2x + \sqrt{x+2}}{2x - \sqrt{x+2}} \geqslant 1$.

Ответ: $x \in \{-2\} \cup \left(\frac{\sqrt{33}+1}{8}; +\infty\right)$.
Решение. Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{2\sqrt{x+2}}{2x - \sqrt{x+2}} \geqslant 0.$$

Чтобы корень существовал, должно выполняться условие $x \geqslant -2$. Если $x = -2$, то исходное неравенство выполнено. Если $x > -2$, то числитель положителен и неравенство эквивалентно следующему:

$$2x - \sqrt{x+2} > 0 \iff \sqrt{x+2} < 2x \iff \begin{cases}x > 0,\\ x + 2 < 4x^2\end{cases} \iff x > \frac{\sqrt{33}+1}{8}.$$

Значит, $x \in \{-2\} \cup \left(\frac{\sqrt{33}+1}{8}; +\infty\right)$.

4. [20 баллов] В окружности с центром O проведены две параллельные хорды BC и NT. Известно, что радиус окружности равен 10, $\angle TON = 120°$, а точки B и O лежат по разные стороны от прямой NT. Точки A и D соответственно — проекции точек B и C на прямую NT. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $BC : AB = 4 : 1$.
Ответ: 36.
Решение. Пусть H и K — проекции центра окружности O на хорды BC и NT соответственно. Так как NOT — равнобедренный треугольник с углом $120°$, его углы N и T равны $30°$. Значит, $OK = \frac{1}{2}ON = 5$. Обозначим $CD = x$. Тогда $BC = 4x$, $BH = \frac{1}{2}BC = 2x$, $OH = OK+KH = 5+x$, $OB = 10$. По теореме Пифагора для треугольника BOH получаем:

$$(x+5)^2 + (2x)^2 = 10^2 \iff x^2 + 2x - 15 = 0 \implies x = 3.$$

Значит, $CD = 3$, $BC = 12$, $S_{ABCD} = 36$.

5. [20 баллов] Найдите все значения параметра a, большие 3 и такие, при которых все неотрицательные корни уравнения $\cos\big((4a-15)x\big) = \cos\big((7a-16)x\big)$, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.
Ответ: $a \in \left\{\dfrac{15}{4}, \dfrac{29}{5}, \dfrac{61}{19}, 14, \dfrac{46}{15}\right\}$.
Решение. Данное уравнение эквивалентно следующей совокупности:

$$\left[\begin{aligned}&(7a-16)x = (4a-15)x + 2\pi k,\\&(7a-16)x = (15-4a)x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&(3a-1)x = 2\pi k,\\&(11a-31)x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\right.$$

По условию $a > 3$, поэтому $3a - 1 \neq 0$, $11a - 31 \neq 0$, откуда

$$x = \frac{2\pi k}{3a-1} \quad \text{или} \quad x = \frac{2\pi k}{11a-31}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Так как нас интересуют только неотрицательные корни, $k \geqslant 0$. Для того, чтобы все указанные корни образовывали арифметическую прогрессию, должно выполняться одно из условий

$$\frac{1}{3a-1} \cdot m = \frac{1}{11a-31} \quad \text{или} \quad \frac{1}{3a-1} = \frac{1}{11a-31} \cdot m, \quad \text{где } m \in \mathbb{N}.$$

В первом случае $a = \frac{31m-1}{11m-3}$, а так как $a > 3$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{31m-1}{11m-3} > 3 \iff \frac{8-2m}{11m-3} > 0 \implies 1 \leqslant m \leqslant 3.$$

Отсюда получаем значения: $a = \frac{15}{4}$, $a = \frac{61}{19}$, $a = \frac{46}{15}$.
Аналогично, во втором случае $a = \frac{31-m}{11-31m} > 3$; последнему неравенству также удовлетворяют только значения $1 \leqslant m \leqslant 3$, следовательно, $a = \frac{15}{4}$, $a = \frac{29}{5}$, $a = 14$.
Итак, $a \in \left\{\frac{15}{4}, \frac{29}{5}, \frac{61}{19}, 14, \frac{46}{15}\right\}$.

Школьные Харитоновские Чтения
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
“БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ — БУДУЩЕЕ НАУКИ”
2025/26 УЧЕБНЫЙ ГОД.
МАТЕМАТИКА. Время выполнения 120 минут

10 КЛАСС. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. [20 баллов] Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма первых десяти её членов равна 300, а её первый, второй и пятый члены в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию.
Ответ: 600 или 1200.
Решение. По условию
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 300, \\ a_2^2 = a_1 a_5. \end{cases}$$
Отсюда
$$\begin{cases} 10a_1 + 45d = 300, \\ (a_1 + d)^2 = a_1 (a_1 + 4d) \end{cases} \iff \begin{cases} 2a_1 + 9d = 60, \\ d^2 = 2a_1 d. \end{cases}$$
Из второго уравнения получаем, что $d = 0$ или $d = 2a_1$.
• Если $d = 0$, то все члены арифметической прогрессии равны между собой: $30 = a_1 = a_2 = \ldots$ Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = 20 \cdot 30 = 600$.
• Если $d = 2a_1$, то первое уравнение принимает вид $2a_1 + 18a_1 = 60$, откуда $a_1 = 3$ и $d = 6$. Тогда $a_{20} = a_1 + 19d = 117$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 10(3 + 117) = 1200$.
Итак, сумма первых двадцати членов прогрессии равна 600 или 1200.

2. [20 баллов] Решите неравенство $\dfrac{2x + \sqrt{x+2}}{2x - \sqrt{x+2}} \geqslant 1$.
Ответ: $x \in \{-2\} \cup \left(\frac{\sqrt{33}+1}{8}; +\infty\right)$.
Решение. Приводя к общему знаменателю, получаем
$$\frac{2\sqrt{x+2}}{2x - \sqrt{x+2}} \geqslant 0.$$
Чтобы корень существовал, должно выполняться условие $x \geqslant -2$. Если $x = -2$, то исходное неравенство выполнено. Если $x > -2$, то числитель положителен и неравенство эквивалентно следующему:
$$2x - \sqrt{x+2} > 0 \iff \sqrt{x+2} < 2x \iff \begin{cases} x > 0, \\ x + 2 < 4x^2 \end{cases} \iff x > \frac{\sqrt{33}+1}{8}.$$
Значит, $x \in \{-2\} \cup \left(\frac{\sqrt{33}+1}{8}; +\infty\right)$.

3. [20 баллов] При каких значениях параметра p уравнения уравнения $3px^2 - 5x + 2p = 0$ и $2x^2 + px - 3 = 0$ имеют общий корень?
Ответ: $p = \pm 1$.
Решение. Пусть t — общий корень уравнений. Тогда должны выполняться оба равенства $3pt^2 - 5t + 2p = 0$ и $2t^2 + pt - 3 = 0$. Выражая p из обоих уравнений (подстановкой можно проверить, что $t = 0$ не является решением), получаем $p = \frac{3-2t}{t}$ и $p = \frac{5t}{3t^2+2}$. Значит,
$$\frac{3 - 2t^2}{t} = \frac{5t}{3t^2 + 2} \iff -6t^4 + 5t^2 + 6 = 5t^4 \iff t^4 = 1 \iff t = \pm 1.$$

Если $t = 1$, то $p = 1$, а если $t = -1$, то $p = -1$. Следовательно, подходят значения $p = 1$ (при этом общий корень $t = 1$) и $p = -1$ (при этом общий корень $t = -1$).

4. [20 баллов] Больший острый угол P прямоугольного треугольника PQR равен α. Точки A и B лежат на катете QR и гипотенузе PR соответственно, причём $AB \perp PR$, а площадь треугольника ABR в четыре раза меньше площади треугольника PQR. Найдите отношение $BP : BR$ (угол α задан.).
Ответ: $\frac{2-\sin\alpha}{\sin\alpha}$.
Решение. Пусть $BR = x$, $BP = y$. Тогда $AR = \frac{x}{\sin\alpha}$, $QR = (x+y)\sin\alpha$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом

$$\frac{1}{4} = \frac{S_{ABR}}{S_{PQR}} = \frac{AR}{QR} \cdot \frac{BR}{PR} = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{x}{(x+y)\sin^2\alpha}.$$

Значит,

$$\frac{(x+y)^2}{x^2} = \frac{4}{\sin^2\alpha} \implies \frac{x+y}{x} = \frac{2}{\sin\alpha} \implies \frac{y}{x} = \frac{2-\sin\alpha}{\sin\alpha}.$$

5. [20 баллов] Найдите количество пар *целых* чисел $(x; y)$, при которых справедливо равенство

$$\frac{x^3+7y}{y-x} = \frac{y^3+7x}{y-x}.$$

Ответ: 12.
Решение. Данное уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{(x^3-y^3)+(7y-7x)}{y-x} = 0 \iff \frac{(x-y)\,(x^2+xy+y^2)-7(x-y)}{y-x} = 0.$$

При условии $y \neq x$ это равносильно каждому из уравнений:

$$x^2+xy+y^2 = 7 \iff 4x^2+4xy+4y^2 = 28 \iff 3x^2+(x+2y)^2 = 28.$$

Из последнего равенства следует, что $3x^2 \leqslant 28$, а так как $x \in \mathbb{Z}$, возможны лишь значения $x = \pm 3$, $x = \pm 2$, $x = \pm 1$, $x = 0$. Подставляя их в уравнение, находим соответствующие значения y. В итоге получаем 12 решений:

$$(-1;3), (-2;3), (-3;2), (1;2), (2;1), (-3;1), (-2;-1), (3;-1), (-1;-2), (3;-2), (1;-3), (2;-3).$$

Школьные Харитоновские Чтения

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

"БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ — БУДУЩЕЕ НАУКИ"

2025/26 УЧЕБНЫЙ ГОД.

МАТЕМАТИКА. Время выполнения 120 минут

9 КЛАСС. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. [20 баллов] Крокодил Гена задумал два положительных числа. Чебурашке удалось узнать, что их среднее арифметическое на 16 меньше большего из этих чисел. Среднее геометрическое этих же чисел на 8 больше меньшего из них. Найдите числа, задуманные крокодилом Геной.
Ответ: 36 и 4.
Решение. Пусть x и y — задуманные числа, и при этом $x > y$. По условию
$$\frac{x+y}{2} + 16 = x, \quad \sqrt{xy} = 8 + y.$$
Из первого уравнения следует, что $x = y + 32$. Подставляя во второе уравнение, отсюда получаем, что $\sqrt{y(y+32)} = y + 8$, $y^2 + 32y = y^2 + 16y + 64$, откуда $y = 4$ и $x = 36$.

2. [20 баллов] Площадь равнобедренной трапеции равна 2000, а радиус вписанной в неё окружности равен 20. Найдите боковую сторону трапеции.
Ответ: 50.
Решение. Так как в трапецию можно вписать окружность, сумма боковых сторон равна сумме оснований, откуда следует, что боковая сторона трапеции равна четверти периметра. Кроме того, площадь равна полупериметру, умноженному на радиус вписанной окружности. Значит, полупериметр равен $\frac{2000}{20} = 100$, а боковая сторона равна $\frac{1}{2} \cdot 100 = 50$.

3. [20 баллов] Сколько существует двенадцатизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 3?
Ответ: 90.
Решение. Есть одно число с суммой цифр 1 ($10\ldots0$), 12 чисел с суммой цифр 2 ($20\ldots0$ и 11 чисел составленных из двух единиц: одна из них должна быть на первом месте, а другая — на любом месте со 2-го по 12-е).
Наконец, если сумма цифр равна 3, то есть $C_{11}^2 = 55$ чисел, содержащих три единицы (одна из них должна быть на первом месте, а две другие — на произвольных местах со 2-го по 12-е) и 22 числа, содержащих одну единицу и одну двойку (11, начинающихся с единицы, и 11, начинающихся с двойки).
Всего получаем $1 + 12 + 55 + 22 = 90$ чисел.

4. [20 баллов] Найдите количество пар *целых* чисел $(x; y)$, при которых справедливо равенство
$$\frac{x^3 + 7y}{y - x} = \frac{y^3 + 7x}{y - x}.$$
Ответ: 12.
Решение. Данное уравнение можно преобразовать так:
$$\frac{(x^3 - y^3) + (7y - 7x)}{y - x} = 0 \iff \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 7(x-y)}{y - x} = 0.$$
При условии $y \neq x$ это равносильно каждому из уравнений:
$$x^2 + xy + y^2 = 7 \iff 4x^2 + 4xy + 4y^2 = 28 \iff 3x^2 + (x + 2y)^2 = 28.$$

Из последнего равенства следует, что $3x^2 \leqslant 28$, а так как $x \in \mathbb{Z}$, возможны лишь значения $x = \pm 3$, $x = \pm 2$, $x = \pm 1$, $x = 0$. Подставляя их в уравнение, находим соответствующие значения y. В итоге получаем 12 решений:

$$(-1;3),(-2;3),(-3;2),(1;2),(2;1),(-3;1),(-2;-1),(3;-1),(-1;-2),(3;-2),(1;-3),(2;-3).$$

5. [20 баллов] Решите неравенство $\dfrac{9x^2}{(x+3)^2} + x^2 < 16$.

Ответ: $x \in \left(1-\sqrt{7}; \sqrt{7}+1\right)$.

Решение. Вычитая из обеих частей неравенства $2 \cdot x \cdot \frac{3x}{x+3}$, получаем

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3x}{x+3} + \frac{9x^2}{(x+3)^2} < 16 - 2x \cdot \frac{3x}{x+3} \iff \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 < 16 - \frac{6x^2}{x+3} \iff$$

$$\iff \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{x^2}{x+3} - 16 < 0 \iff \left(\frac{x^2}{x+3} + 8\right)\left(\frac{x^2}{x+3} - 2\right) < 0 \iff$$

$$\iff \frac{\left(x^2+8x+24\right)\left(x^2-2x-6\right)}{(x+3)^2} < 0 \iff \frac{\left(x-\sqrt{7}-1\right)\left(x+\sqrt{7}-1\right)}{(x+3)^2} < 0.$$

Значит, $x \in \left(1-\sqrt{7}; \sqrt{7}+1\right)$.