

ШИФР

019

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ПО математике

В 11

классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Романов Николай Алексеевич

ШИФР

219

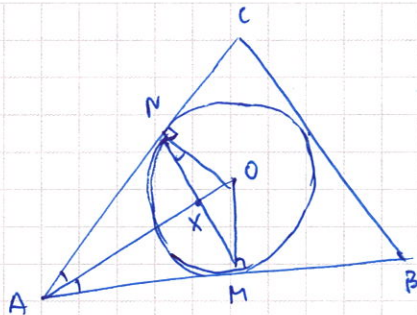
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
1/2	+	± ↑	✓	+
10	20	13	2	20
				Σ 65

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

①



$\triangle ANM$ равноб. ($AN = AM$)
X — середина NM, AX — высота
 $NX = \frac{1}{2} NM$

$$\angle OAN = 90^\circ - \angle ANX = 90^\circ - (90^\circ - \angle ONX) = \angle ONX$$

пусть $\angle A = \alpha$. тогда $\angle OAN = \frac{\alpha}{2}$

$$\frac{AX}{NX} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad \frac{XO}{NX} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{AX + XO}{NX} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{AO}{\frac{1}{2} NM} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 4$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 - (2 + \sqrt{3})^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-4\sqrt{3} - 6} = \frac{28\sqrt{3} + 48}{12} = 4 + \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 7 + 4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{4\sqrt{3} - 6} = \frac{48 - 28\sqrt{3}}{12} = 4 - \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

ОТВЕТ: $\arctg(4 + \frac{7}{3}\sqrt{3})$ или $\arctg(4 - \frac{7}{3}\sqrt{3})$

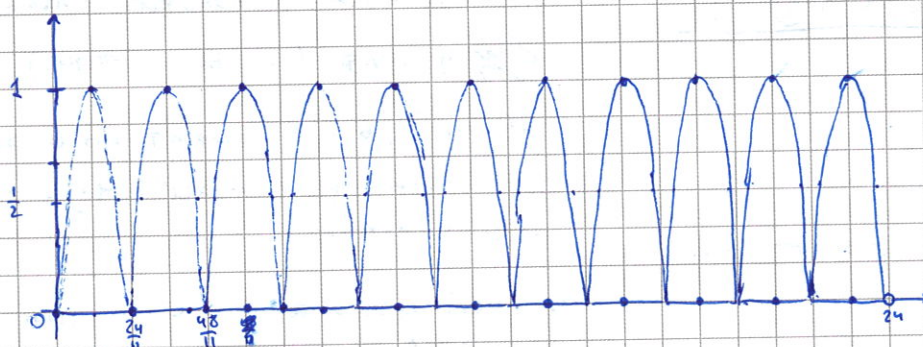
Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

② $|\sin \frac{11\pi}{24}x| = a \quad x \in [0, 24)$

период $\sin y$ это 2π . период $\sin \frac{11\pi}{24}x$ равен $\frac{2\pi}{\frac{11\pi}{24}} = \frac{48}{11}$

при $x = k \cdot \frac{24}{11}$ $|\sin \frac{11\pi}{24}x| = \sin k\pi = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

нарисуем график $y = |\sin \frac{11\pi}{24}x|$

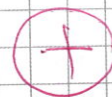


при $a = 1$ уравнение имеет 11 корней

для $a \in (1, 0)$ уравнение имеет 22 корня

при $a = 0$ уравнение имеет 11 корней ($x \neq 24$)

Ответ: $a \in (1, 0)$ - 22 корня
 $a \in \{1, 0\}$ - 11 корней



③ $x^2y^2 < 2 - xy \quad x^2y^2 + xy - 2 < 0$

рассмотрим границы $x^2y^2 + xy - 2 = 0$

наша область - область внутри границ

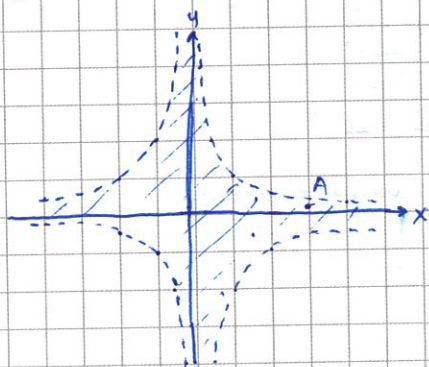
$x \neq 0$ или $x = 0$?

$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2x^2}$

$y = -\frac{2}{x}$ или $y = \frac{1}{x}$

полезно?

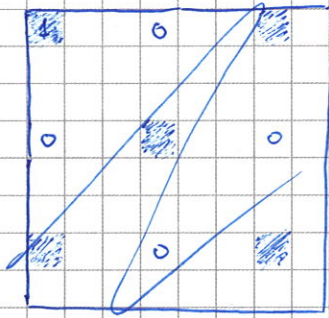
где неравенство?



$y = 0$ и $x = 0$ - асимптоты, причем чем больше x или y , тем сильнее график прижимается к асимптоте.

если 2 точки не получится соединить отрезком, их получится соединить ломаной, вершина которой - точка $(0, 0)$
т.е. ΔOAB лежит внутри Γ

5



1	2	5	1	2	5	1	2
4	3	6	4	3	6	4	3
7	8	7	8	7	8	7	8
1	2	5	1	2	5	1	2
4	3	6	4	3	6	4	3
7	8	7	8	7	8	7	8
1	2	5	1	2	5	1	2
4	3	6	4	3	6	4	3

рассмотрим раскраску доски.

если одна клетка дуполя попадет на один цвет, то вторая клетка этого дуполя попадет на клетку того же цвета.

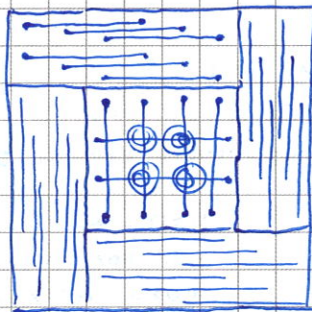
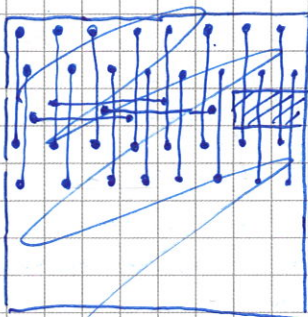
8 цветов 1, 2, 3, 4 имеют по 9 экземпляров.
на них можно расположить только $8 \cdot \frac{4}{2}$ дуполя (не хватит пары)

цвета 5, 6, 7, 8 имеют по 6 экземпляров
там можно расположить $4 \cdot \frac{6}{2}$ дуполя.
они уместятся.

черного цвета 4 клетки. там
уместятся 2 дуполя.

максимальное кол-во дуполей: $\frac{8 \cdot 4}{2} + \frac{6 \cdot 4}{2} + 2 = 16 + 12 + 2 = 30$

пример следует из раскраски



⊕ - незакрашенная клетка.

Ответ: 30

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

④

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \in \mathbb{Q}, \quad a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, c \in \mathbb{Q}$$

если $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$ не будет рациональным:

при $a \in \mathbb{Q}$ $a\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, при $b \in \mathbb{Q}$ $b\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ и при $c \in \mathbb{Q}$ $c\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

пусть $x \in \mathbb{Q}$, тогда и $x\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. тогда $x = \frac{a}{b}$, $x\sqrt{2} = \frac{c}{d}$ и $\sqrt{2} = \frac{cd}{da}$,
что неверно.

аналогично для $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$

значит, хотя бы один множитель < 0 .

если $a\sqrt{2} < 0$, то $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} - x = \sqrt{6}$, где $x \in \mathbb{Q}$

$$2a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{6}ab + 2ax\sqrt{2} - 2bx\sqrt{3} = 6c^2$$

если существуют такие ^{ненулевые} a, b и c , что
 $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, то тогда

$$\sqrt{6}ab - ax\sqrt{3} - bx\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

р/н число $c\sqrt{6} + x$. но если $ax\sqrt{2} + bx\sqrt{3} - \sqrt{6}b\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, то

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \text{ и } c\sqrt{6} + x \in \mathbb{Q}, \text{ а } x \in \mathbb{Q},$$

тогда $c\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$

аналогично для $a\sqrt{2} < 0$ и $b\sqrt{3} < 0$

если менять знаки, ~~тоже~~
рассуждения такие же.

получилось, что если $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, то

$$a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, b\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \text{ и } c\sqrt{6} \in \mathbb{Q},$$

это возможно только если $a = 0$, $b = 0$ и $c = 0$ (см. выше)

Ответ: $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$