

ШИФР

025

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ПО математике

В 11

классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Лаврентьев Матвей Андреевич

ШИФР

(заполняется секретарем секретариата)

Σ=60

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

~11.2.

$$\left| \sin \frac{4\sqrt{2}}{25} x \right| = a \quad a \in [0; 1] \\ x \in [0; 24]$$

При $x=0$ имеем $\sin(0)$ При $x=24$ имеем $\sin(11\sqrt{2})$ При увеличении x мы идем по окружности.Весь путь от $[0$ до $11\sqrt{2}]$. Все точки берем по модулю. (отражаем относительно оси x)Если $a=0$, то корней 11. (корень 11 не учитываем) за каждые пол-окружности добавляется корень.Если $a=1$, то корней 22Если $0 < a < 1$, то корней 22

за каждые пол-окружности добавляется 2 корня.

Ответ: если $a=1$ или $a=0$, то корней 11.
если $0 < a < 1$, то корней 22.

~11.4.

Предположим что a, b, c — натуральные, тогда:

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{2}\sqrt{3}, \text{ поделим на } \sqrt{6}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{6}} \text{ возведем в квадрат.}$$

$$\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{2} + \frac{2ab}{\sqrt{6}} = \frac{c^2}{6} + c^2 - \frac{2ac}{\sqrt{6}}$$

Перенесем оставшееся в одну сторону.

$\frac{2ab + 2ac}{\sqrt{6}} = 0$ КО макс не может быть. числитель $\in \mathbb{Q}$ знаменатель $\in \mathbb{Q}$ отношение $\in \mathbb{Q}$, но оно равно нулю.

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

~ 11.4.
Будем называть R - число рациональное, а R иррациональное.
Предположим что число $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = R$

тогда $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = R - c\sqrt{6}$

поделим на $\sqrt{2}\sqrt{3}$, получим:

$$\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{6}} - c$$

возведем обе части в квадрат:

$$\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{2} + \frac{2ab}{\sqrt{6}} = \frac{R^2}{6} - c^2 - \frac{2Rc}{\sqrt{6}}$$

~ 11.5.

Пример на 30 диграфов:

A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	...	A ₈
B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	...	B ₈
C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	...	C ₈
A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	...	A ₈
B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	...	B ₈
C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	...	C ₈
A ₉	B ₉	C ₉	A ₉	B ₉	C ₉
A ₁₀	B ₁₀	C ₁₀	A ₁₀	B ₁₀	C ₁₀

Осталось 4 пустые клетки

Теперь докажу что больше нельзя и мой пример максимален:

1	2	5	1	2	5	1	2
3	4	6	3	4	6	3	4
7	8	9	7	8	9	7	8
1	2	5	1	2	5	1	2
3	4	6	3	4	6	3	4
7	8	9	7	8	9	7	8
1	2	5	1	2	5	1	2
3	4	6	3	4	6	3	4

Применим такую раскраску.

Любые два диграфа лежат в клетках с одинаковыми цифрами.

Посчитаем сколько раз встречается та или иная цифра:

- 1 - 9 раз
- 2 - 9 раз
- 3 - 9 раз
- 4 - 9 раз
- 5 - 6 раз
- 6 - 6 раз
- 7 - 6 раз
- 8 - 6 раз
- 9 - 4 раза

Предположим что мы поставили диграф, тогда число раз уменьшится ровно на 2, число не изменит четность.

Мы не можем полностью покрыть все 1, 2, 3, 4, их четное количество, а каждое новое диграф уменьшает их на 2.



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

~ 11.5.

см. лист ~ 1.

Значит в конце обязательно останется хотя бы одна единица, двойка, тройка, четверка. А пример на 4 неокрашенные клетки я привел.

~ 11.3.

а) Заменим $xy = t$.

$$t^2 < 2 - t$$

$$t^2 + t - 2 < 0$$

$$t_{1,2} = 1; -2$$

Значит $xy < 1$ и $xy > -2$

Нанесем график $x < \frac{1}{y}$

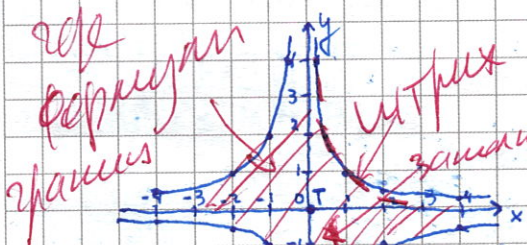
и график $x > -\frac{2}{y}$

$x > 0$

1

а $x \leq 0$

$x = 0$

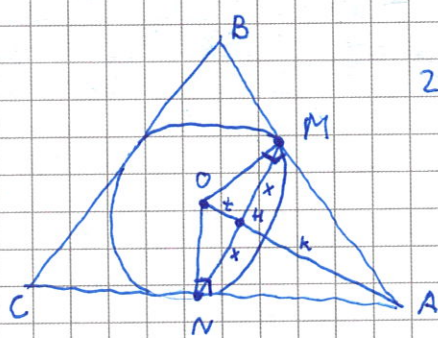


Вся внутренняя область, ограниченная этими графиками, — множество A.

Почему такие границы в нашей полуплоскости?

б) От любой точки из множества A мы можем перейти до точки $T(0;0)$ по прямой. Значит от любой точки мы можем перейти до любой. Любые две точки соединим с $T(0;0)$, получим нужную замкнутую (в частном случае просто отрезок).

~ 11.1.



$$\angle MN = \angle AO.$$

1) Четырехугольник AMON — вписанный, потому что $\angle N = 90^\circ$, $\angle M = 90^\circ$ (их сумма 180°)

2)

2) Пусть H - т. пересечения AO и MN .

3) обозначим $AH = k$, $OH = t$, $MH = NH = x$

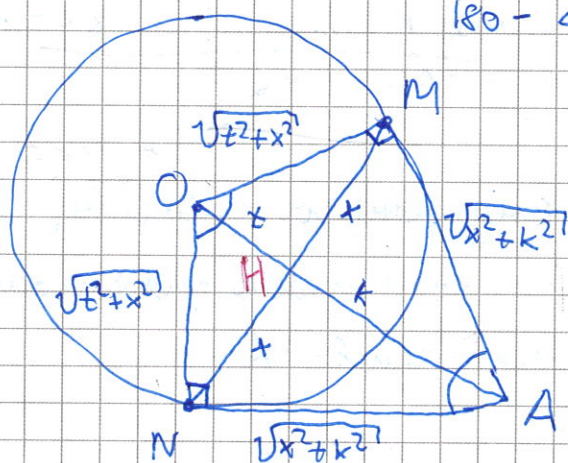
Из условия имеем: $t+k = 4x$

4) $AM = AN$, $OM = ON$ ($\triangle AOM$ и $\triangle AON$ равны по 3 сторонам)

5) ~~Степень точки H~~: $tk = x \cdot x = x^2$ (по св-ву пересек. хорд в окружности)

По теореме Пифагора выразим гипотенузы

$\triangle AHM$, $\triangle OHM$, $\triangle OHN$, $\triangle AHN$



Ибо $\angle A = \angle O$, значит $\cos \angle A = \cos \angle O$

Неверно!

Занним теорему косинусов для $\triangle AMN$ и $\triangle OMN$:

$$x^2 + k^2 + x^2 + k^2 = 4x^2 - 2\cos \angle A \cdot (x^2 + k^2) \quad (\triangle AMN)$$

$$+ x^2 + t^2 + x^2 + t^2 = 4x^2 - 2\cos \angle O \cdot (x^2 + t^2) \quad (\triangle OMN)$$

$$4x^2 + 2(t^2 + k^2) = 8x^2 - 2\cos \angle A (2x^2 + t^2 + k^2)$$

Используя $t+k = 4x$, $tk = x^2$ выразим все через x

$$4x^2 + 32x^2 - 4x^2 = 8x^2 - 2\cos \angle A (2x^2 + 14x^2)$$

$$32x^2 = 8x^2 - 2\cos \angle A \cdot 16x^2$$

$$2\cos \angle A = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

$$\cos \angle A = \frac{3}{4}$$

$$\text{Ответ: } \angle A = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$