

ШИФР

α 56

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ПО математике В 11 классе  
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Мерлов Михаил Юсифович

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	+	+
20	20	19	20	20
				99

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»

$\sqrt{2}$  - иррациональные

Значит  $-6mk = -2p$   
 $mk = -p/3$

4  $3m^2 + 6k^2 - p^2 - 2 = 0$

$3m^2 + 6k^2 - 2 = p^2 = 9m^2k^2$

$9m^2k^2 - 3m^2 - 6k^2 + 2 = 0$

$(3m^2 - 2)(3k^2 - 1) = 0$

$\begin{cases} m^2 = \frac{2}{3} \\ k^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow m, k$  - иррациональные  
противоречие.

5) Пусть одно из чисел  $a, b, c \geq 0$   
тогда  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \in \mathbb{R}$

1)  $a = 0$ :  $b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{3}(b + c\sqrt{2}) \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow b + c\sqrt{2} = 0$

$b + c\sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot \mathbb{R}$ , 2-й случай.

$c\sqrt{2} + b - \sqrt{3} = 0$

~~аналогично~~

$c\sqrt{2} + p\sqrt{3} = -b$ ,  $p = -\sqrt{3}$  - 1-й случай.

$2c^2 + 3p^2 + 2\sqrt{6}cp = b^2$

Значит,  $\sqrt{6}cp \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \Rightarrow b\sqrt{3} \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0 \\ p = 0 \Rightarrow -b = -\sqrt{2}c, \text{ все } c \end{cases}$

Значит,  $a \geq b \geq c \geq 0$

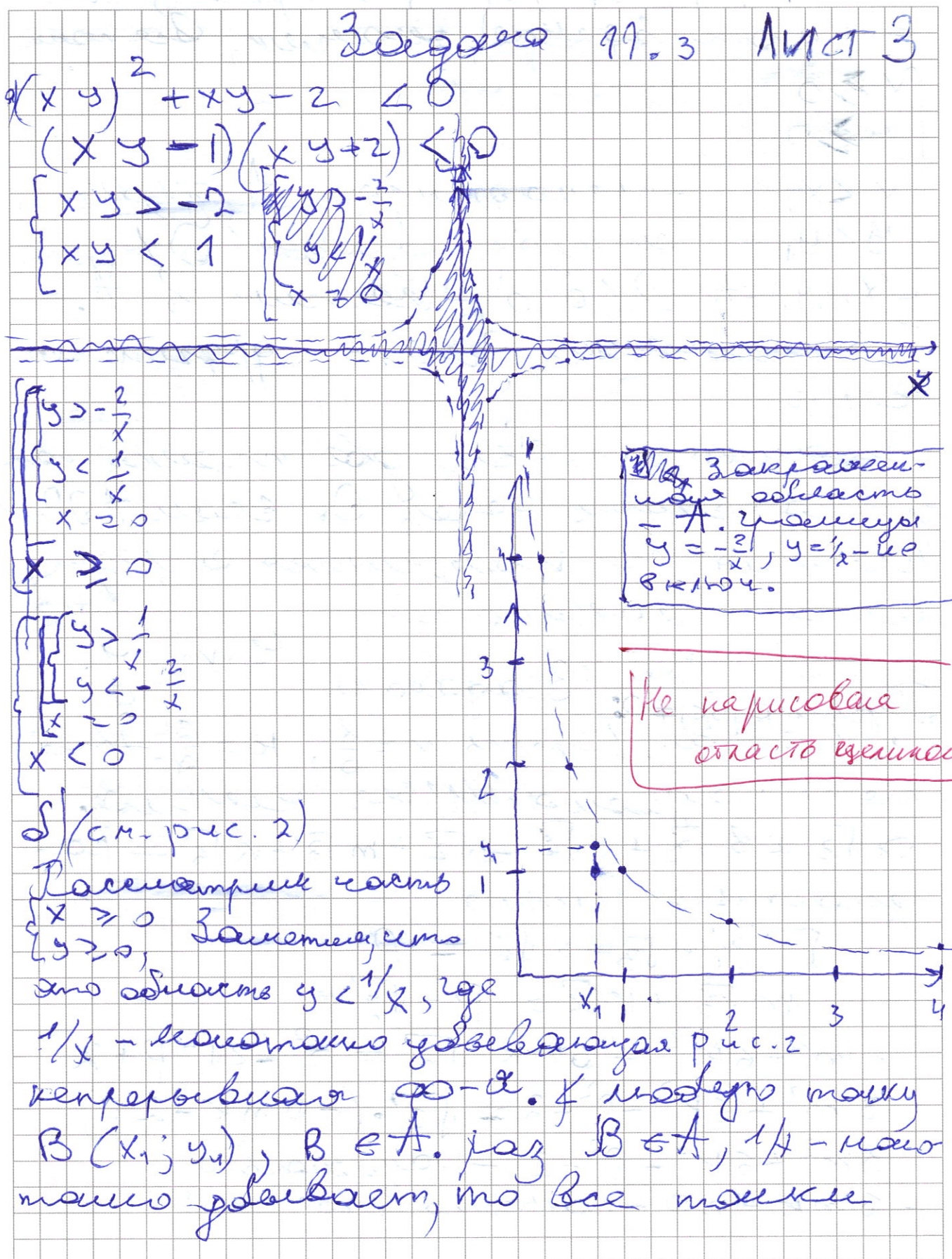
Аналогично для  $b \geq 0$ , или  $c \geq 0$ .

Значит,  $a \geq b \geq c \geq 0$   $\in \mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$ .

Лист 4



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!





$(x \geq 0, y \geq 0)$ , где  $x < x_1, y < y_1$ , принадлежат  $\Delta$  (имеет  $x_1, y_1 < 1$ , а  $x_1 < x_1, y_1 < y_1, y_1 \cdot x_1 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0$ )  
 $\neq$  противоречие), значит, все точки

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$x < x_1, y < y_1$  — принадлежат  $\Delta$ , значит, отрезок от начала  $O \Delta$   $(x_1, y_1) \in \Delta$   $O(0,0)$  — лежит в  $\Delta$ .

Аналогично, для 3-х других смежных вершин.

Значит, любые две точки можно соединить через  $O$ . Если  $AB$  — диагональ, то внутренняя диагональ целая, замкнутая  $\Delta$ .

с.т.г.

Пусть  $a, b, c \neq 0$ . Задача 4  
 $a, b, c$  — рац. Пусть  $m = \frac{b}{a}, k = \frac{c}{a}$ . Это тоже рациональные числа.

$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = \sqrt{2} + m\sqrt{3} + k\sqrt{6}$  — рациональное число

$$\sqrt{2} + m\sqrt{3} + k\sqrt{6} = p$$

$$m\sqrt{3} + k\sqrt{6} = p - \sqrt{2}$$

$$3m^2 + 6k^2 + 6mk\sqrt{2} = p^2 - 2\sqrt{2}p + 2$$

$$3m^2 + 6k^2 - p^2 - 2 = \sqrt{2} \cdot (-6mk - 2p)$$

$$3m^2 + 6k^2 - p^2 - 2 \text{ — рациональное}$$

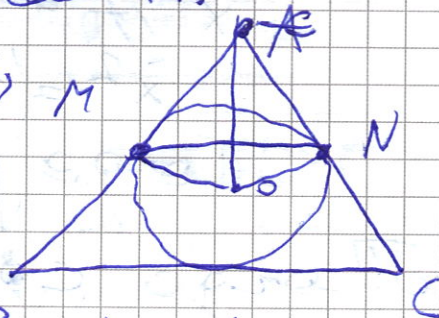
$$-6mk - 2p \text{ — рациональное}$$



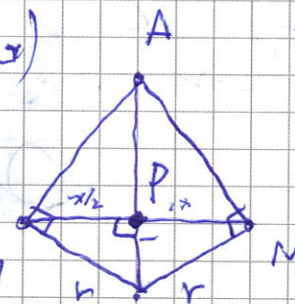
Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Задача 11. Лист 2

Докажите, что  $OM \perp MT$ ,  $M$   
 $O \perp N \perp NA$ ,  $AM = AN$  —  
отрезки касания  
тогда  $\triangle AMO = \triangle ANO$   
(прямоуг.  $AM = AN$ ,  $AO$  — общая)



Тогда и  $\triangle MPO = \triangle OPN$   
( $\angle MOA = \angle AON$ ,  $OP$  — общая,  
 $MO = ON = r$ )  $\Rightarrow \angle MPO =$   
 $= \angle OPN = 90^\circ$ . Пусть  $MN = 2x$ ,  
тогда  $AO = 2x$ ,  $MP = MN/2 = x$   
Из  $\triangle MOP$ ,  $OP = \sqrt{x^2 + r^2}$ , но из  
подобия  $\triangle AMO$  и  $\triangle MOP$  ( $MP$  — высота  
прямоугольного треугольника):



$$\frac{OP}{MO} = \frac{MP}{AO} \Rightarrow OP = \frac{r^2}{2x}$$

$$\frac{r^2}{2x} = r^2 - \frac{x^2}{4} \quad | \cdot 4x \Rightarrow 2r^2 = 4xr^2 - x^3$$

$$2r^2(2x - 1) = x^3$$

$$r = \sqrt{\frac{x^3}{(2x-1)^2}}$$

$$\text{Тогда } AP = 2x - OP =$$

$$= 2x - \frac{r^2}{2x} = \frac{4x^2 - r^2}{2x}$$

$$\text{Но, } AM = AO^2 - OM^2 = \sqrt{4x^2 - r^2}$$



Дана 0 APM:

$$4x^2 - r^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{(4x^2 - r^2)^2}{4x^2} \cdot 4x^2$$

$$(4x^2 - r^2)r^2 \geq x^4$$

$$x^4 - 4x^2r^2 + r^4 \geq 0$$

$$x^2 = (2 \pm \sqrt{3})r^2$$

$$\text{Тогда } \sqrt{\frac{r^2}{x^2}} = \frac{r}{x} = \sqrt{2 \mp \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \mp 1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Тогда } \sin \angle MAO = \frac{r}{2x} = \frac{\sqrt{3} \mp 1}{4} \in [0, 1]$$

$$\text{Тогда } \angle A = 2 \cdot \arcsin \left( \frac{\sqrt{3} \mp 1}{4} \right) = \begin{cases} \angle A = 30^\circ \\ \angle A = 150^\circ \end{cases}$$

Данная задача

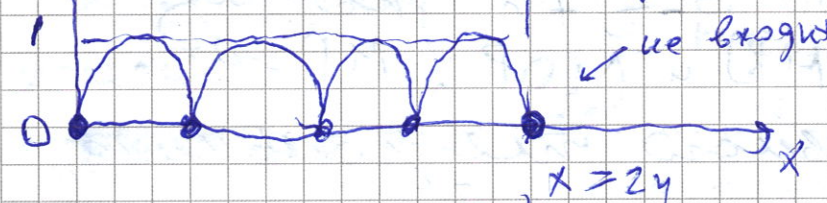
№ 11.2

Данная задача

+

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = a, \quad a \in [0, 1], \quad x \in [0, 24]$$

Решение задачи (косинус)



Данная задача

$$\left( \sin \frac{11\pi}{24} x \right) \geq 0 \Rightarrow \frac{11\pi}{24} x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{24} x = \frac{24}{11} k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in [0, 24]$$

$$\Rightarrow k \in [0, 10] - 11 \text{ корней}$$

$$\text{У } b x = 24, \quad \sin \frac{11\pi}{24} x = \sin \frac{11\pi}{24} \cdot 24 = 0$$

Значит, значения  $\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right|$  составлен

из 11 корней

$a = 0, a = 1$  — 11 корней, при  $a \in (0, 1)$

— 22 корней (по 11 корней в каждом из двух полуинтервалов)

+



ШИФР

256

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Задача 11.5

1) Запомним, что на рис. 1

Все дуплеты принадлежат к одному номеру (если первая клетка дуплета на 1, то и вторая тоже).

Лист 1

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

рис 1

Клеток  $1^{\text{н}}$  — 21  $\Rightarrow$  не больше 10

Клеток  $2^{\text{н}}$  — 22  $\Rightarrow$  не больше 19

Клеток  $3^{\text{н}}$  — 21  $\Rightarrow$  не больше 10

Значит, всего не больше, чем 31

2) Проверим на рис. 2 Рассмотрим только клетки 2-го типа, ко-

2	6	15
1	5	14
	4	13
3	11	12
	10	19
7	17	18
8	16	21

личество у каждого из них какой-то номер

3) Введем схему Пусть можно обозначить дуплеты так, что все клетки второго типа будут принадлежать какому-то дуплету, тогда, в силу симметрии,



Судя по клеткам, это есть дупло  
 ( $15^{\circ}; 20$ ); (если  $(15; 4)$ , то все слишком  
 мелко). Клетка 22 в дупле, зна-  
 чит, есть дупло ( $22^{\circ}; 14$ ), клет-  
 ка 9 в дупле, значит, есть дупло  
 ( $9; 4$ ). Клетка 2 в дупле, зна-  
 чит, есть дупло ( $2; 4$ ). Но, когда  
 у клетки 12 нет второго клан-  
 ке, с которой она может со-  
 ставить дупло, тогда на  
 клетках второго типа можно  
 составить не больше, чем 11-12 12  
 дупел, тогда всего дупел  
 не больше, чем  $10+10+10 = 30$

Пример на 30:



h	22	23	24	22	23	24	LS	26
b	19	20	21	19	20	21	24	28
f	16	17	18	16	17	18	29	30
e	13	14	15	13	14	15	25	26
d	10	11	12	10	11	12	7	28
c	7	8	9	7	8	9	24	30
a	4	5	6	4	5	6		
	1	2	3	1	2	3		
							1	2

Все клетки ряда  
 1, образованы с клан-  
 кеми 4 ряда, 2-го  
 с 5-м, 3-го с 6-м.  
 6 4 4 8: (h; e),  
 (g; d); (f; c).

Всего 30 дупел

Анкет: 30.

Задача 11.1

(см. след. лист)