

ШИФР

022

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ в 11 классе  
(наименование общеобразовательного предмета)

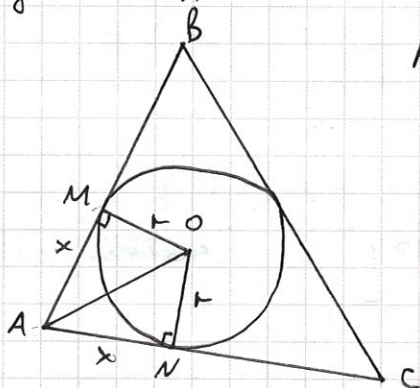
Фамилия И.О. участника ПРОКОШЕВ МАКСИМ ОЛЕГОВИЧ

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	-	+
20	20	20	0	20
				80

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Задание 11.1



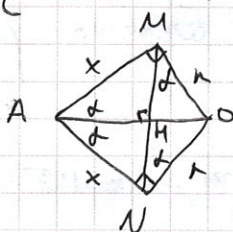
$$AD = 2MN$$

$$\angle A = ?$$

$$MO = ON = r$$

$$AM = AN = x$$

$$AO = \sqrt{x^2 + r^2}$$



$$\triangle AMON - \text{впис.} (\angle AMO = \angle ANO = 90^\circ)$$

$$\angle MAO = \angle MNO = \alpha$$

$$\triangle MON \text{ р.б.} \Rightarrow \angle OMN = \angle ONM = \alpha$$

$$\text{из впис. } \angle OMN = \angle OAN = \alpha$$

$$\triangle AMN \text{ р.б. и } AO \text{ сим-са} \Rightarrow AO - \text{высота} \Rightarrow AO \perp MN$$

$$AO - \text{медiana} \Rightarrow MH = HN = h$$

$$AO \perp MN = H$$

$$MN = 2h$$

$$S_{AMO} = \frac{1}{2} x r = \frac{1}{2} h \sqrt{x^2 + r^2} \Rightarrow h = \frac{xr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$MN = 2h = \frac{2xr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$AD = 2MN \Leftrightarrow \frac{4xr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \sqrt{x^2 + r^2} \Rightarrow 4xr = x^2 + r^2 \Leftrightarrow x^2 - 4xr + r^2 = 0$$

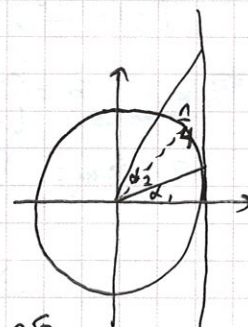
$$\Leftrightarrow x = \frac{4r \pm \sqrt{16r^2 - 4r^2}}{2} = 2r \pm \sqrt{3}r$$

$$\textcircled{a} \text{ ~~sin~~ } \operatorname{tg} \alpha = \frac{MO}{AM} = \frac{r}{x} = \frac{r}{2r \pm \sqrt{3}r} = \frac{1}{2 \pm \sqrt{3}}$$

$$\textcircled{a} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\textcircled{b} \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\textcircled{a} \operatorname{tg} \angle A = \operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 4 - 3 + 4\sqrt{3}} =$$





$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-6} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{м.к. } 0 \leq \angle A < \frac{\pi}{2}, \text{ то } 0 \leq \angle A < \frac{\pi}{2} - \text{острый}$$

$$\textcircled{8} \quad \operatorname{tg} \angle A = \operatorname{tg} 2\alpha_2 = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{1 - (2+\sqrt{3})^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{1-4-3-4\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-6-4\sqrt{3}} =$$

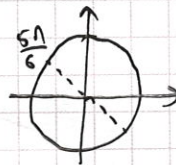
$$= -\frac{2+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = -\frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{м.к. } \frac{\pi}{4} < \angle A < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \frac{\pi}{2} < \angle A < \pi - \text{тупой}$$

м.к.  $\frac{\pi}{4} < \angle A < \frac{\pi}{2}$ , то  $\frac{\pi}{2} < \angle A < \pi$  - тупой

$$\operatorname{tg} \angle A = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \angle A = 150^\circ$$

Ответ:  $\textcircled{a} \quad \angle A = 30^\circ$

$\textcircled{8} \quad \angle A = 150^\circ$



Задача 11.2

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = a \quad \text{для всех } a \in [0; 1] \quad ? \text{ сколько } x \in [0; 24]$$

$$-1 \leq \sin \frac{11\pi}{24} x \leq 1, \text{ то } 0 \leq \left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| \leq 1$$

Значит при  $\forall a \in [0; 1]$  будут решения

~~для~~  $\sin \frac{11\pi}{24} x$  при  $x \in [0; 24]$

$$0 = \sin \frac{11\pi}{24} \cdot 0 \leq \sin \frac{11\pi}{24} x \leq \sin \frac{11\pi}{24} \cdot 24 = \sin 11\pi$$

Синус проходит 5 полных кругов на единичной окружности. Значит при  $\forall a \in [0; 1]$  будет по 5 решений для каждого  $a$

Для модуля синуса будет по 10 решений

при любом  $a \in [0; 1]$

$$\textcircled{a} \quad \left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 1 \quad - 2 \cdot 5 + 1 = 11 \text{ решений}$$

$$\textcircled{8} \quad \left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 0 \quad - 2 \cdot 5 + 1 = 11 \text{ решений}$$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = a, \text{ где } a \in (0; 1) \quad - 4 \cdot 5 + 2 = 22 \text{ решения}$$

Итого.  $a \in [0; 1]$  ~~бесконечно~~

Ответ:  $\begin{cases} a=0: & 11 \text{ решений} \\ a=1 & \end{cases}$

$0 < a < 1: \quad 22 \text{ решения}$





Фамилию, имя, отчество **НЕ** писать! Лист **НЕ** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Задача 11.3

a)  $A: x^2 y^2 < 2 - xy$

$$x^2 y^2 + xy - 2 < 0 \quad (*)$$

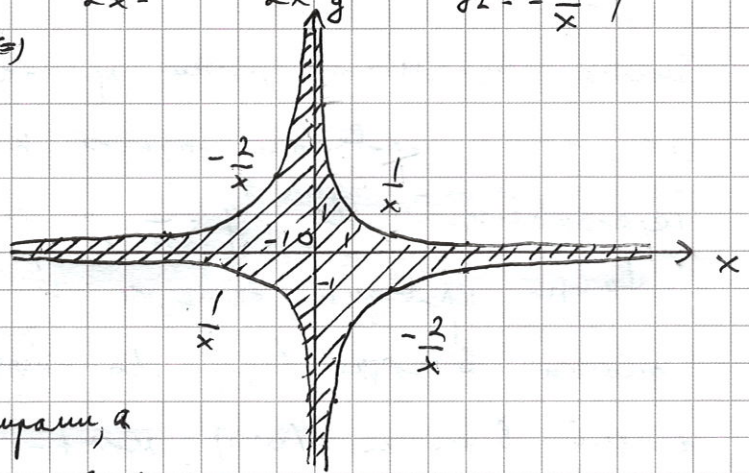
$$y / x^2 y^2 + xy - 2 = 0$$

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2x^2} = \frac{-x \pm 3x}{2x^2} = \frac{-1 \pm 3}{2x} \quad (*)$$

$$y_1 = \frac{1}{x} \\ y_2 = -\frac{2}{x}$$

$$(*) \left(y - \frac{1}{x}\right) \left(y + \frac{2}{x}\right) < 0 \quad (**)$$

$$(*) \begin{cases} y < \frac{1}{x} \\ y < -\frac{2}{x} \\ y = 0 \end{cases} \quad (**) \begin{cases} y > \frac{1}{x} \\ y < -\frac{2}{x} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Линии рисованы не пунктиром, а

сплошными линиями для удобства восприятия,

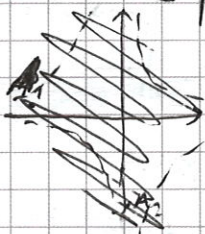
Все линии не являются решениями!

~~Второй график множества A:~~  
~~Итоговый график множества A:~~

б) Возьмем 2 точки из множества A

① Если между ними нет точек  $y = -\frac{2}{x}$   
то отрезок, очевидно

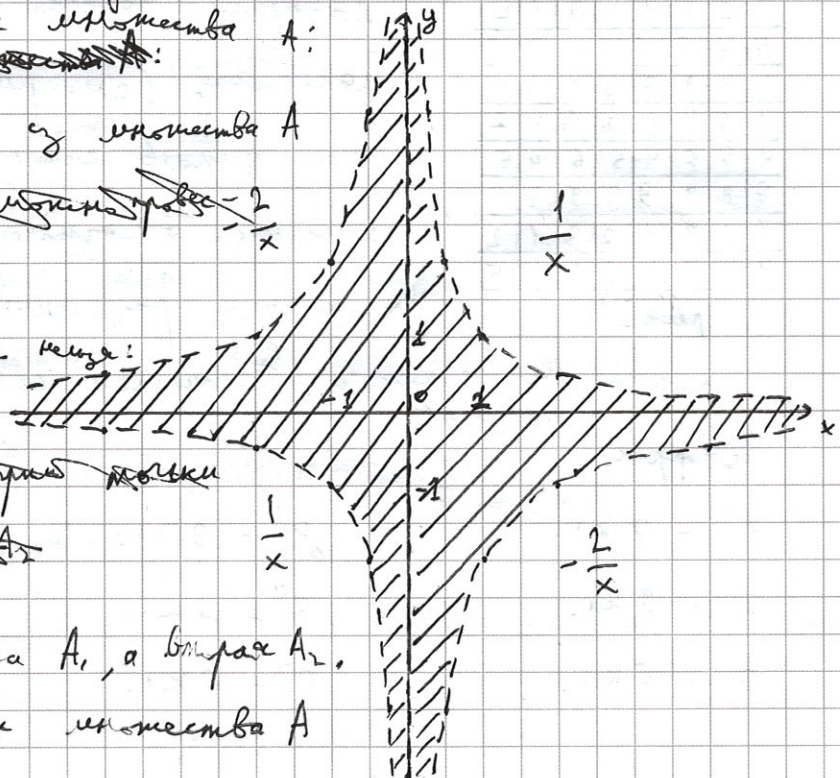
② Если между ними есть точки  $y = -\frac{2}{x}$



Рассмотрим точки  
 $A_1$  и  $A_2$

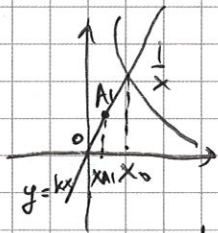
Пусть первая точка  $A_1$ , а вторая  $A_2$ .

Из каждой из точек множества A





можно проводить отрезок, соединяющий точку и начало координат (точку  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ). Такой отрезок не пересекает ни один из графиков  $y = \frac{1}{x}$  и  $y = -\frac{2}{x}$ , т.к. прямая  $y = kx$  пересекает



~~ни одного~~ график  $y = \frac{1}{x}$  в точке  $x_0$ , а мы взяли точку  $A_1$ , принадлежащую прямой  $y = kx$ , где  $0 < x_{A_1} < x_0$ .

Ан-но доказываемся для пересечения  $y = kx$  и

$$y = -\frac{2}{x}$$

Значит, из любой точки, принадлежащей множеству  $A$  мы можем провести отрезок к началу координат, не пересекающий ни  $y = \frac{1}{x}$ , ни  $y = -\frac{2}{x}$ .

Ан-но проводим отрезок из  $A_2$ . Наши отрезки соединены в точке  $(0;0)$ . Поскольку из двух звеньев, соединенных в точке  $(0;0)$ , можно соединить любые две точки из множества  $A$ , т.е. д.

Задача 11.5

1	2	3	1	2	3	1	2
4	5	6	4	5	6	4	5
7	8	9	7	8	9	7	8
1	2	3	1	2	3	1	2
4	5	6	4	5	6	4	5
7	8	9	7	8	9	7	8
1	2	3	1	2	3	1	2
4	5	6	4	5	6	4	5

рис. 1

Оценка.

Раскрасим квадрат  $8 \times 8$  в следующую раскраску (см. рис. 1)

Если диагональ есть, то ~~она~~ обе ее

клетки обозначены одинаковой цифрой

из клеток разных цифр диагональ собрать

можно не сможем. Посчитаем кол-во клеток каждой

(по условию)

цифры

"1" - 9 кл.

"2" - 9 кл.

"3" - 6 кл.

"4" - 9 кл.

"5" - 9 кл.

"6" - 6 кл.

"7" - 6 кл.

"8" - 6 кл.

"9" - 4 кл.



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

а) В клетках "1"; "2"; "4"; "5" не более 4 пар, т.е.  
не более 4 дуплетов  $\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 4 /$

$$\leq 4 \cdot 4 = 16 \text{ дуплетов}$$

б) В клетках "3"; "6"; "7"; "8" не более 3 пар, т.е.  
не более 3 дуплетов  $\left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3 /$

$$\leq 3 \cdot 4 = 12 \text{ дуплетов}$$

в) В клетках "9" не более 2 пар, т.е. не  
более 2 дуплетов  $\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2 /$

$$\leq 2 \cdot 1 = 2 \text{ дуплета}$$

Итак, всего  $\leq 16 + 12 + 2 = 30$  дуплетов.

Петя сможет закрасить не более 30 дуплетов, максимумо  
30.

Пример. Каждый дуплет обозначу отдельной цифрой

1	5	9	1	5	9	4	8
12	16	20	12	16	20	15	19
23	26	29	23	26	29	15	28
2	6	10	2	6	10	4	8
13	12	21	13	12	21	15	19
24	29	30	24	29	30	25	28
3	7	11	3	7	11		
14	18	22	14	18	22		

рис. 2

Задача 11.4

$a, b, c$  - рациональны

1?

$$\Rightarrow a = b = c = 0$$

$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$  - рационально

рац.  $\times$  иррац. = иррац.

$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$  - рац.  
иррац. иррац. иррац.



Сумма трех иррациональных чисел рациональна, причем  
поз радикалами три различных числа: 2, 3, 6

$$\underbrace{a\sqrt{2}}_{\text{иррац.}} + \underbrace{b\sqrt{3}}_{\text{иррац.}} + \underbrace{c\sqrt{6}}_{\text{иррац.}} = \text{рац.}$$

а) Если бы поз радикалами стало одинаковое число  $t$ , то  
 $a\sqrt{t} + b\sqrt{t} + c\sqrt{t} = \sqrt{t}(a+b+c)$  было бы рац. тогда и  
 $\underbrace{a\sqrt{t}}_{\text{иррац.}} + \underbrace{b\sqrt{t}}_{\text{иррац.}} + \underbrace{c\sqrt{t}}_{\text{иррац.}}$

только тогда, когда  $a+b+c=0$ , т.е.  $a\sqrt{t} + b\sqrt{t} + c\sqrt{t} = 0$

б) Поз радикалами разные числа:

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = \sqrt{2}(a + c\sqrt{3}) + b\sqrt{3}$$

$$\underbrace{a\sqrt{2}}_{\text{иррац.}} + \underbrace{b\sqrt{3}}_{\text{иррац.}} + \underbrace{c\sqrt{6}}_{\text{иррац.}} = \text{рац.}$$

Сумма трех иррациональных чисел

рациональна тогда и только тогда,

когда эта сумма равняется нулю

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \text{при рациональных } a, b, c \text{ единств.}$$

$$\text{реш. } a=b=c=0$$

\* Рассмотрим вектора  $\vec{p} = (a; b; c)$

$$\vec{q} = (\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6})$$

они даны

Выберем  $a, b, c$  такие, что  $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 0^\circ$  ( $\cos \varphi = 1$ )

( $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  сонаправлены)

$$\underbrace{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}}_{\text{рац.}} = \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}_{\text{иррац.}} \underbrace{\sqrt{2+3+6}}_{\text{иррац.}} \cos 0^\circ$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=c=0$$

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = 0 \text{ при } a=b=c=0, \text{ и так, } a=b=c=0, \text{ т.е.}$$

Ответ: да, можно

контрпример

$$(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{8}+1) + (5-3\sqrt{2}) = 8$$