

ШИФР

248

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Евстропова Мария Владимировна

ШИФР 248

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	7	-	5
20	20	8	2	4
				54

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1

Дано: $\triangle ABC$

впис. окр-сть ($O; r$)

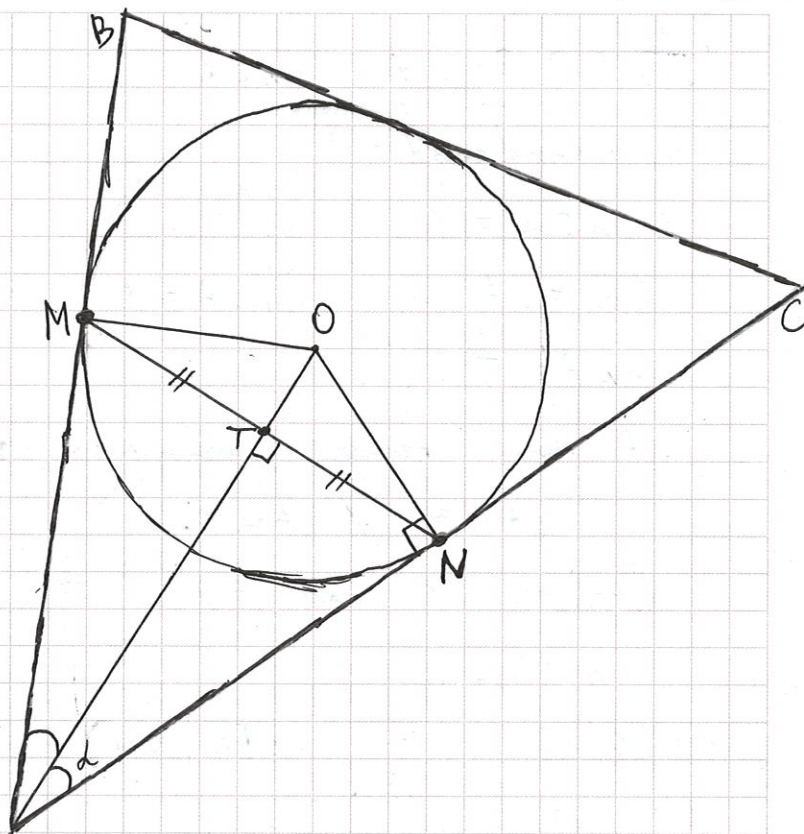
$M, N \rightarrow$ точки касания

$M \in AB$

$N \in AC$

$AO = 2MN$

$\angle A = ?$



~~Решение:~~

Решение: 1) Пусть $AO \cap MN = T$

$AN = AM$ (как отрезки

касательных из одной точки) $\Rightarrow \triangle MNA \rightarrow p/b$ (по отр.)

2) $O \rightarrow$ центр. впис. в $\triangle ABC$ окр-сти $\Rightarrow AO \rightarrow$ биссектриса в $\triangle ABC$ (т.к. центр впис. в \triangle окр-сти лежит в точке пересечения биссектрис этого \triangle) $\Rightarrow AO \rightarrow$ высота и медиана (по св-ву $p/b \triangle$) $\Rightarrow MT = TN$; $AT \perp MN \Rightarrow \triangle ATN \rightarrow$ прямоугольный

3) ON и $OM \rightarrow$ радиусы впис. окр-сти; AB и $AC \rightarrow$ касательные $\Rightarrow OM \perp AB$; $ON \perp AC$ (по св-ву касательной) $\Rightarrow \triangle AON \rightarrow$ прямоугольный

4) Т.к. $AO \rightarrow$ биссектриса (п. 2) $\Rightarrow \angle MAT = \angle TAN$

Пусть $\angle MAT = \angle TAN = \alpha$. Тогда в $\triangle ATN$: $\sin \alpha = \frac{TN}{AN} \Rightarrow$

$$\Rightarrow TN = AN \cdot \sin \alpha \text{ (по снп. sin угла в прямоугол. } \Delta \text{)}$$

$$TN = \frac{1}{2} MN \text{ (т.к. } AO \rightarrow \text{ медиана из н. } \angle) \Rightarrow MN = 2TN = 2 \sin \alpha \cdot AN$$

$$5) \text{ в } \Delta AON: \cos \alpha = \frac{AN}{AO} \text{ (по снп. cos угла в прямоугол. } \Delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AO = \frac{AN}{\cos \alpha}$$

$$\checkmark 6) \text{ по условию } AO = 2MN \Rightarrow \frac{AN}{\cos \alpha} = 2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot AN \quad | : AN$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = 2 \cdot 2 \sin \alpha \quad | \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$$

$$2 \sin 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = \angle A \Rightarrow 2 \sin \angle A = 1$$

$$\sin \angle A = \frac{1}{2}$$

$\angle A$ может принимать в пределах от 0° до 180°

$$\angle A = 30^\circ / \angle A = 150^\circ \quad \Downarrow$$

Ответ: 30° или 150° + 20

~ 11.2

$$\alpha \in [0; 1]$$

$$x \in [0; 24)$$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = \alpha$$

$$\text{При } x=0: \sin \frac{11\pi}{24} \cdot 0 = \sin 0 = 0$$

$$\text{При } x=24: \sin \frac{11\pi}{24} \cdot 24 = \sin 11\pi = 0$$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 0 \Rightarrow \sin \frac{11\pi}{24} x = 0$$

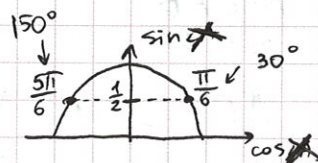
$$\frac{11\pi}{24} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | : \pi$$

$$\frac{11}{24} x = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{24k}{11}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{НО для заданных } x \in [0; 24):$$

$$x = \frac{24k}{11}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{11\pi}{24} x = 1 & ① \\ \sin \frac{11\pi}{24} x = -1 & ② \end{cases}$$



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

~ 11.2 (продолжение)

$$\textcircled{1} \frac{11\pi}{24} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | : \pi \quad \textcircled{2} \frac{11\pi}{24} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | : \pi$$

$$\frac{11}{24} x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{24} x = \frac{1+4k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{(1+4k)24}{22}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{(1+4k)12}{11}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{24} x = -\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11}{24} x = \frac{-1+4k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{(4k-1)12}{11}, k \in \mathbb{Z}$$

Для заданных $x \in [0; 24)$:

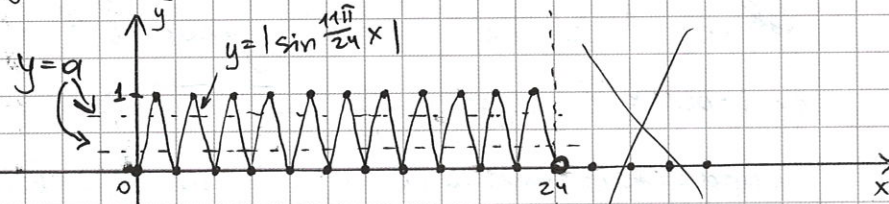
$$x = \frac{(1+4k)12}{11}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$x = \frac{(4k-1)12}{11}, k \in \mathbb{N}$$

Построим графики $y = a$ и $y = \left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right|$

из решения

$$x = \frac{24k}{11}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$



Заметим, что $x=24$

при $k=11$; $x=0$ при $k=0 \Rightarrow$ если $x=0 \rightarrow$ нулевое пересечение с осью OX , то $x=24 \rightarrow 11$ -ое пересечение с осью OX

$y=a$ представляет собой прямую, параллельную оси OX и перемещающуюся вверх-вниз в зависимости от параметра a

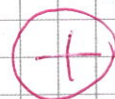
⇓
перемещаая $y=a$ получаем:

при $a=0$: 11 корней

при $a=1$: 11 корней

при $a \in (0; 1)$: 22 корня

Ответ: при $a=0$ и $a=1 \rightarrow 11$ корней; при $a \in (0; 1) \rightarrow 22$ корня



~ 11.4

a, b и $c \rightarrow$ рациональные числа

$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \rightarrow$ рациональное число

Если $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \rightarrow$ рациональное число, то

каждое из чисел $a\sqrt{2}$; $b\sqrt{3}$; $c\sqrt{6}$ также должно быть

рациональным (сумма иррациональных чисел не может давать рациональное число)

В свою очередь, если $a\sqrt{2}$; $b\sqrt{3}$; $c\sqrt{6} \rightarrow$ рациональные, то числа a, b, c могут быть только иррациональными или нулём, поскольку произведение иррационального (\mathbb{I}) и рационального (\mathbb{R}) числа не может давать \mathbb{R} число, только если $\mathbb{R} \rightarrow$ это 0, в других случаях это невозможно. Произведение двух \mathbb{I} чисел может давать \mathbb{R} число в некоторых случаях (например $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, т.е. когда подкоренные выражения одинаковы), но по условию $a, b, c \rightarrow$ рациональные. \Rightarrow Возможен только один случай, когда $a = b = c = 0$

Ответ: да, можно. Это единственный возможный случай.

~ 11.5

Ответ: ~~10~~ 30

Пример:

В одну строку / столбец можно разместить только 3 диполя

1	2	3	1	2	3	25	26
4	5	6	4	5	6	27	28
7	8	9	7	8	9	29	30
10	11	12	10	11	12	25	26
13	14	15	13	14	15	27	28
16	17	18	16	17	18	29	30
19	20	21	19	20	21		
22	23	24	22	23	24		

Любым способом максимальное возможное кол-во диполей на квадрате 8×8 равно 30

и доказано

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

а) ~ 11.3
 $A: x^2 y^2 < 2 - xy \Rightarrow (xy)^2 < 2 - xy$

Пусть $xy = a$. Тогда: $a^2 < 2 - a$

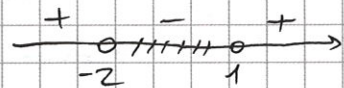
$a^2 + a - 2 < 0$

$a^2 + a - 2 = 0$

$a_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$a_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

$D = 1 - 4 \cdot (-2) = 9$



$-2 < a < 1 \Rightarrow -2 < xy < 1$

