

ШИФР

а24

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ПО МАТЕМАТИКЕ

В

11

классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника

КУЗНЕЦОВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ

ШИФР

024

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
0	+	↑	—	+
0	20	17	0	20 57

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.3.

Рассмотрим это неравенство,

$$x^2 y^2 < 2 - xy$$

$$(xy)^2 + xy - 2 < 0$$

$$(xy + 2)(xy - 1) < 0$$

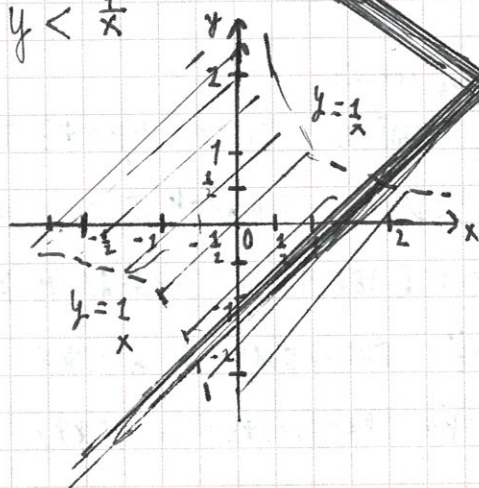
$$-2 < xy < 1$$

$$\left[-\frac{2}{x} < y < \frac{1}{x}, x \neq 0 \right]$$

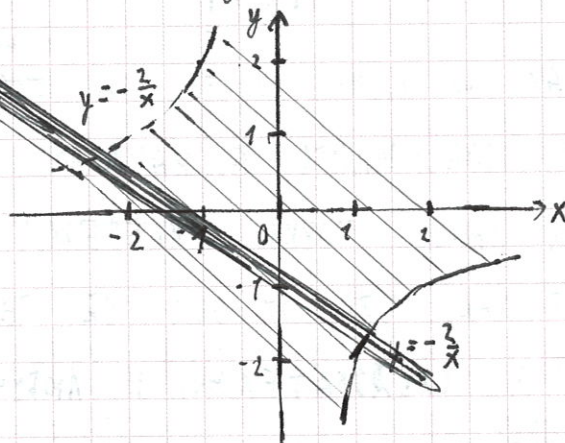
$$[x = 0, y \in \mathbb{R}]$$

изобразим на координатной плоскости неравенства

$$y < \frac{1}{x}$$



$$y > -\frac{2}{x}$$



изобразим на координатной плоскости неравенства

$$xy < 1$$

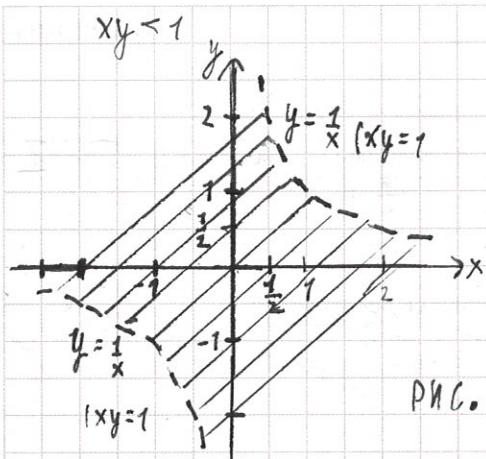


рис. 1

и
почему такие
рисунки?

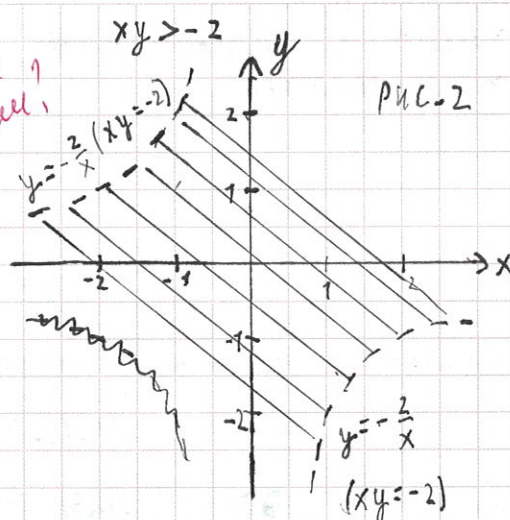


рис. 2

Объединим их на координатной плоскости. Полученное множество ~~объединение~~ и будет искомым в задаче, множеством.

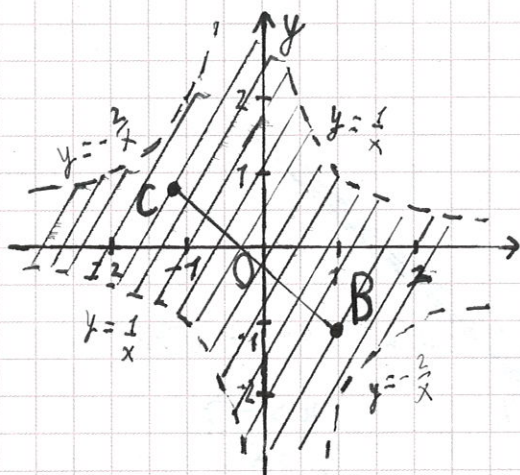


рис. 3.

рисунок графика (рис. 3)

б) Как нетрудно понять на рисунке, любую точку множества можно соединить с началом координат отрезком. В самом деле, любую точку гиперболы можно соединить с началом координат так, что отрезок не пересечёт гиперболу в других точках, а следовательно, и любую точку, расположенную между двумя гиперболами, находящимися по разные стороны от оси абсцисс и по одну от оси ординат (или наоборот), можно соединить отрезком с началом координат тем же образом).

Значит, любые две точки данного множества можно соединить ломаной из 2 звеньев, в которой общая точка звеньев будет началом координат (ч.т.д.). Некоторые точки ^{в-д-д} можно сое

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

В данном множестве A можно соединить также одним отрезком, как, например, точки B и C (см. рис. 3).

* Оговорюсь, любые две, если ~~они~~ ни одна из них не является началом координат. В противном случае их можно соединить одним отрезком, пролегающим внутри множества A .

Н 11.5.

Рассмотрим крайнюю правую верхнюю точку доски, как **и** метру: **д**но **п**омыть, **д**на. Может состоять в одном диполе только с двумя клетками (см. рис. 1)

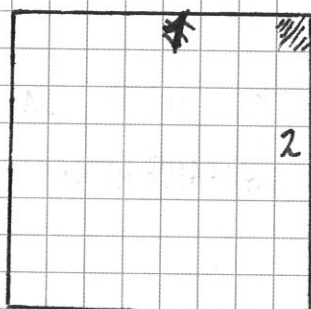
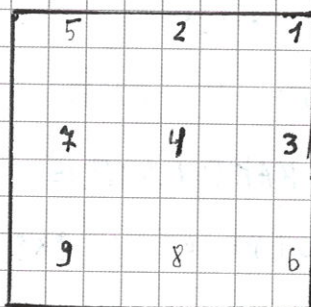


рис. 1.



В свою очередь, они также, могут состоять в одном диполе только с двумя клетками, не считая первой. Отметим и их, и те ^{клетки} точки, с которыми они могут состоять в одном диполе, и те клетки, с которыми их клетки могут состоять в одном диполе (см. рис. 2). Тогда каждая из отмеченных клеток может состоять в одном диполе только с другой отмеченной клеткой (см. рис. 2 еще раз).

Значит, хотя бы одна из этих клеток не будет состоять в диполе ни с кем, т.к. клеток всего 9, а в диполе клеток 2, 9 не кратно 2, а в двух диполях сразу клетка быть не может, т.к. Петя не может закрасить одну и ту же клетку 2 раза.

Значит, 1 клетка из выбранных на рисунке 2 девяти не будет закрашена в любом случае. То же самое по аналогии верно для отмеченных 9 клеток на рисунке 3, 9 на рисунке 4, и 9 на рис. 5 ~~и 9 на рис. 6.~~ (см. рис. 3, 4, 5)

4	2	1
7	5	3
9	8	6

рис. 3

4	2	1
7	5	3
9	8	6

рис. 4

4	2	1
7	5	3
9	8	6

рис. 5

Значит, как минимум 4 клетки на доске Петя закрасить не сможет и максимальное кол-во закрашенных клеток на доске будет равно $8 \times 8 - 4 = 60$.

Пример закрашенных 60 клеток можно увидеть на рисунке 6.

25	27	29	25	27	29
26	28	30	26	28	30
17	18	19	20	21	22
9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6
17	18	19	20	21	22
9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6

рис. 6

Значит, максимальное кол-во клеток, которые сможет закрасить Петя, равно 60, а максимальное кол-во диполей на доске равно $60 : 2 = 30$ (см. рис. 6). Таков и будет ответ.

Ответ: 30 диполей.



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N 11.2.

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = a.$$

$$a \in [0; 1]$$

$$x \in [0; 24)$$

РАССМОТРИМ $a = 0$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 0$$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = \sin(\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{11\pi}{24} x = \sin(\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{24}{11} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

НА ПОЛУИНТЕРВАЛЕ $[0; 24) = [0; \frac{264}{11})$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{24}{11}, \quad x_3 = \frac{48}{11}, \dots, x_{11} = \frac{240}{11}$$

ВСЕГО 11 КОРНЕЙ

РАССМОТРИМ $a = 1$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 1$$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{11\pi}{24} x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{11\pi}{24} x = \sin\left(\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{11\pi}{24} x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11\pi}{24}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{12}{11} + 24k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

НА ПОЛУИНТЕРВАЛЕ $[0; 24) = [0; \frac{264}{11})$

$$x_1 = \frac{12}{11}, \quad x_2 = \frac{36}{11}, \quad x_3 = \frac{60}{11}, \dots, x_{11} = \frac{252}{11}$$

ВСЕГО 11 КОРНЕЙ.

РАССМОТРИМ $\alpha \in (0; 1)$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24}x \right| = \alpha$$

$$\arcsin \alpha = \left| \frac{11\pi}{24}x \right|$$

$$\arcsin \alpha = \pm \frac{11\pi}{24}x$$

НА ОТРЕЗКЕ $[0; \frac{\pi}{2}]$ (СМ. РИС. 1) ✓

$$x = \frac{24 \arcsin \alpha}{11\pi}, \quad x_1 = \frac{24 \arcsin \alpha}{11\pi}$$

НА ОТРЕЗКЕ $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ (СМ. РИС. 1)

$$x_2 = -x_1 + \pi \cdot 24$$

НА ОТРЕЗКЕ $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$ (СМ. РИС. 1)

$$x_3 = x_1 + 24\pi$$

И НА ОТРЕЗКЕ $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ (СМ. РИС. 1)

$$x_4 = -x_1 + 48\pi$$

ВСЕГО НА ПОЛУИНТЕРВАЛЕ $[0; 24) = [0; \frac{264\pi}{11})$

$$x_1 = \frac{24 \arcsin \alpha}{11\pi}, \quad x_2 = \frac{24 \arcsin \alpha}{11\pi} + 24\pi$$

ВСЕГО 22 КОРНЯ

ОТВЕТ: ПРИ $\alpha = 1$ 11 КОРНЕЙ, ПРИ $\alpha = 0$ 11 КОРНЕЙ, ПРИ $\alpha \in (0; 1)$ 22 КОРНЯ.

РИС. 1.

