

ШИФР

а 38

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ПО МАТЕМАТИКЕ В 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

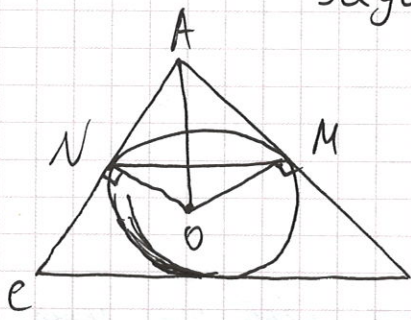
Фамилия И.О. участника Хорошев Егор Владимирович

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	—	+
20	18	20	0	78

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Задача 11.1



1) OM — радиус
 AB — касательная
 M — т. касания
 $\Rightarrow OM \perp AB$
 (т.к. рад. перп. к касат. в т. касания)

2) $OM \perp AB \Rightarrow \triangle AMO$ — прямоугольный.

3) O — центр впис. окр. $\Rightarrow AO$ — бисс. (т.к. центр впис. окр. треугольника лежит в т. пересечения бисс.)

$$\angle OAM = \frac{\angle A}{2}$$

4) $\triangle AMO$ — прямоугольный (2)
 $\angle OAM = \frac{\angle A}{2}$ (3) $\Rightarrow AM = AO \cdot \cos \frac{\angle A}{2}$

5) По условию M и N — точки касания $\Rightarrow AM = AN$ (как касательные, проведенные из одной точки)

6) Объединяя п. 4 и п. 5, получим, что $AM = AN = AO \cdot \cos \frac{\angle A}{2}$ ✓

7) Запишем Теорему косинусов для $\triangle NAM$:

$$MN^2 = AO^2 \cos^2 \frac{\angle A}{2} + AO^2 \cos^2 \frac{\angle A}{2} - 2 \cdot AO^2 \cos^2 \frac{\angle A}{2} \cdot \cos \angle A$$

$$MN^2 = 2 AO^2 \cos^2 \frac{\angle A}{2} (1 - \cos \angle A)$$

По условию $AO = 2MN$, тогда

$$MN^2 = 8 MN^2 \cos^2 \frac{\angle A}{2} (1 - \cos \angle A)$$

$$\frac{1}{4} = 2 \cos^2 \frac{\angle A}{2} (1 - \cos \angle A)$$

$$\frac{1}{4} = (1 + \cos \angle A)(1 - \cos \angle A)$$

$$\frac{1}{4} = 1 - \cos^2 \angle A \quad \checkmark$$

$$\cos^2 \angle A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \angle A = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Так как $0^\circ < \angle A < 180^\circ$, то либо $\angle A = 30^\circ$, либо $\angle A = 150^\circ$

Ответ: 30° или 150° + X нет

Задача 11.2

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = a,$$

$$0 \leq x < 24$$

$0 \leq \frac{11\pi}{x} < 11\pi$, значит x может задавать любой угол, лежащий на полуинтервале $[0; 11\pi)$

Рассмотрим все возможные случаи:

1) $a = 0$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 0$$

$$\sin \frac{11\pi}{24} x = 0$$

$$\frac{11\pi}{24} x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Т.к. $0 \leq x < 24$, то $0 \leq \frac{24n}{11} < 24$

$$0 \leq n < 11$$

Всего 10 решений

0 не учитываем!

2) $0 < a < 1$

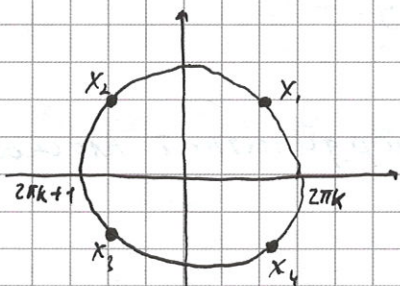
$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{11\pi}{24} x = a \\ \sin \frac{11\pi}{24} x = -a \end{cases} \Leftrightarrow \sin \frac{11\pi}{24} x = b, \text{ при } b \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$

Продолжение на
следующем месте

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Задача 11.2. Продолжение

Рассмотрим решение данного уравнения на тригонометрической окружности;



Заметим, что на интервале $(\pi k; \pi(k+1))$, к-е уравнение имеет ровно два решения (такой же вывод можно получить из того, что $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$).

Тогда для $0 < a < 1$ уравнение имеет 22 решения

3) $a = 1$

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 1$$

$$\frac{11\pi}{24} x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{12}{11} + \frac{24m}{11}, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Т.к. } 0 \leq x < 24, \text{ то } 0 \leq \frac{12}{11} + \frac{24m}{11} < 24$$

$$0 \leq 1 + 2m < 22$$

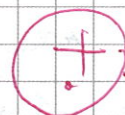
$$-\frac{1}{2} \leq m < \frac{21}{2}$$

Всего 11 решений

Ответ: при $a = 0$ 10 корней

при $0 < a < 1$ 22 корня

при $a = 1$ 11 корней



Задача 11.3

а) $x^2 y^2 < 2 - xy$

$$x^2 y^2 + xy - 2 < 0$$

$$-2 < xy < 1$$

При $x > 0$:

$$-\frac{2}{x} < y < \frac{1}{x}$$

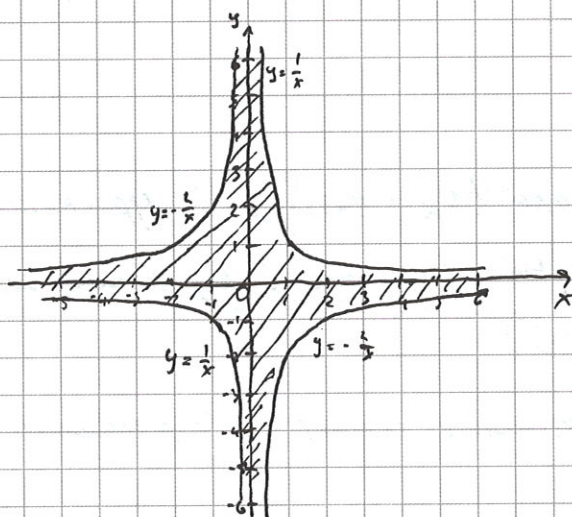
При $x = 0$:

y — любое число

При $x < 0$:

$$\frac{1}{x} < y < -\frac{2}{x}$$

Изобразим это множество на координатной плоскости:



б) Из данного изображение можно заметить, что из любой точки этого множества можно «пройти» в любую другую точку множества, не ~~находясь~~ покидая самого множества.

Другими словами, любые две точки множества можно соединить ломаной линией.

Докажем, что эта ломаная линия имеет не больше двух звеньев:

Допустим нам надо соединить $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Из рисунка понятно, что можно провести внутри множества отрезки OA и OB (где O — нач. координат; $O(0; 0)$)

Продолжение на след. листе

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Задача 11.3. Продолжение

Тогда из этих отрезков OA и OB получим ломаную AOB , следовательно, \forall две точки можно соединить ломаной из двух звеньев (отрезков, соединяющих точку и начало координат), если эти звенья не лежат на одной прямой.

В свою очередь, если оба звена лежат на одной прямой, то две точки можно соединить отрезком.

Вывод: \forall две точки множества A можно соединить либо отрезком, либо ломаной из двух звеньев ч.т.ч.

Задача 11.4.

Предположим

a, b, c рациональны, то $a\sqrt{2}, b\sqrt{3}, c\sqrt{6}$ иррациональны ($a \neq 0$)

От иррациональности можно избавиться путём умножения, деления и вычитания. Мы рассматриваем сумму $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$, поэтому варианты с умножением и делением нам не подходят.

Предположим, что от иррациональности данной суммы избавились с помощью вычитания. Заметим, что

так можно избавиться от иррациональности только если вычесть такое же иррациональное число, то есть

$$x - y = z, \text{ где } x, y \notin \mathbb{Q}, \text{ а } z \in \mathbb{Q} \text{ возможно только при } x = y.$$

Числа $a\sqrt{2}, b\sqrt{3}, c\sqrt{6}$ имеют разные иррациональные множители, поэтому $a\sqrt{2} \neq b\sqrt{3} \neq c\sqrt{6}$ при любых рациональных a, b, c , не равных нулю (попарно)

Таким образом, можно сделать вывод, что ни одним из

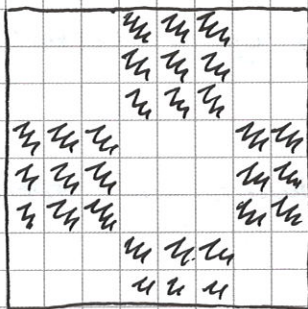
способов нельзя избавиться от иррациональности суммы $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$, значит, эта сумма иррациональна, что противоречит условию задачи

Вывод: предположение неверно, $a = b = c = 0$

Ответ: да, можно

Задача 11.5

Раскрасим клетчатый квадрат 8×8 квадратами 3×3 в два цвета, или показано ниже (каким бы это было)



Заметим, что две клетки одного цвета обязательно должны быть ^{расположены в клетках} "разного" цвета, т.к. ^{они} расположены в концах "полоски" длины 4 клетки.

Из рисунка видно, что "черных" клеток в квадрате 8×8 всего 30, следовательно, в этом квадрате не более 30 ^{клеток} одного цвета.

Приведём пример 30 ^{расположения} клеток, (для удобства разные цвета обозначим разными числами)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30		
25	26	27	28	29	30		

Ответ: 30 клеток