



ШИФР

a6m-10

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИпо математика
(наименование общеобразовательного предмета)Дата проведения 21.01.2024Фамилия И.О. участника Тимохин Даниил Александрович

Серия и номер паспорта

Дата рождения

Класс 11Школа № 3 им. А.С. Макофенко районгород Самаргород**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляции по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (другие записи на папке делать запрещено).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

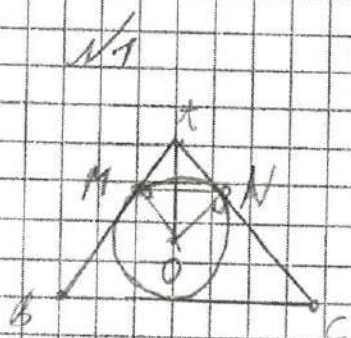
Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!



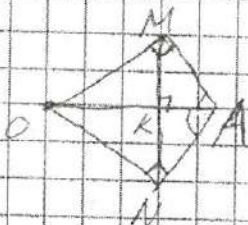
Дано: O - центр вписанной окружности; M, N - точки касания AB и AC , $OA = 2MN$
Найти: $\angle A$
Решение:

По свойству касания: $AM = MN$ т.к. они являются касательными к окружности, проведенными из одной точки.

2) AO - биссектриса угла A , т.к. центр вписанной окружности - пересечение биссектрис углов треугольника

3) $OM \perp AB$ и $ON \perp AC$ т.к. это радиусы к касательным и потому $OM = ON$

Получаем четырехугольник $OMAN$



т.к. AO - биссектриса $\angle A$
 $AM = MN$ (1), то AO также и высота и медиана в $\triangle AMN$ и

т.к. K - точка пересечения AO и MN .

Тогда $MK = \frac{1}{2}MN$, а значит

$$S_{OMA} = \frac{1}{2} OA \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OA = \frac{1}{8} OA^2 \text{ т.к.}$$

$$MK = \frac{1}{2}MN \text{ и } MN = \frac{1}{2}OA, \text{ так } AK \perp MN \text{ и } AK \in AO$$

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

1/1 продолжение

стр. 2

По построению т.к. $OM \perp MA$, то

$$AM = OA \cos \angle OAM = OA \cos \frac{\angle A}{2} \quad (OA - \text{дугсектриса})$$

$$OM = OA \sin \angle OAM = OA \sin \frac{\angle A}{2} \quad (OA - \text{дугсектриса})$$

$$S_{OMA} = \frac{1}{2} AM \cdot OM = \frac{1}{2} \cos \frac{\angle A}{2} \sin \frac{\angle A}{2} \cdot OA^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \sin \angle A \cdot OA^2$$

При этом $S_{OMA} = S_{OMA}$, а значит

$$\frac{1}{8} OA^2 = \frac{1}{4} \sin \angle A \cdot OA^2$$

$$\sin \angle A = \frac{1}{2}$$

$$\angle A = 30^\circ$$

$$\angle A = 150^\circ$$

$0 < \angle A < 180^\circ$ по свойству угла в треугольнике

+

Ответ: $\angle A = 30^\circ$ или $\angle A = 150^\circ$

1/2

$$\left| \sin \left(\frac{11\pi}{24} \right) \right| = a$$

Нам надо рассмотреть $\frac{11\pi}{24}$

Пусть $t = \frac{\pi}{24}$, тогда при

$$t \in (0; 2\pi)$$

$$t \in (0; 1)$$

а значит

$11\pi t \in (0; 11\pi)$ т.е. включаем

в себя 5 полных 2π окружностей

и одну полуокружность, где

ищем крайние значения от 0 до π

(так включительно)

Теперь рассмотрим какие значения

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 100 Будет прикидывать \sin стр. 3

т.н. $|\sin \frac{11\pi x}{24}| = a$, но

$\sin 11\pi t = a$

$\sin 11\pi t = -a$

т.н. $a \in [0, 1]$ как-то доп
 ограничить вводный не

надо.

Разберём ситуацию от 0 до 1.

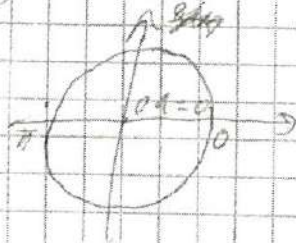
Сначала $a = 0$

Мы получим одно уравнение

$\sin 11\pi t = 0$ и на окружности

будут проходить корни

(для $\varphi = 11\pi t$) 0 и π , но т.н.



$0 \leq \frac{11\pi x}{24} \leq 11\pi$, но для φ целых

будет 10 корней (для пересечения
 на окружности и на поверхности)

по окружности можно в точке 0

(функция периодическая и каждый

по окружности занимает промежуток

$[2\pi k, 2\pi(k+1))$ и $n-2$ окружности $k = n-1$)

т.е. будет 11 корней при $a = 0$

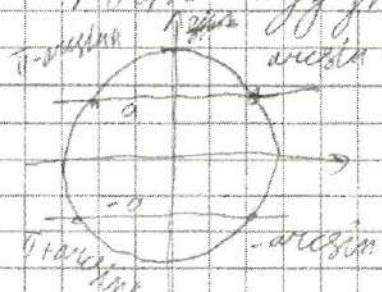
Первое $0 < a < 1$ тогда

$\sin \varphi = a$

$\sin \varphi = -a$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Множ-
ство на комплексной плоскости
будут корни.



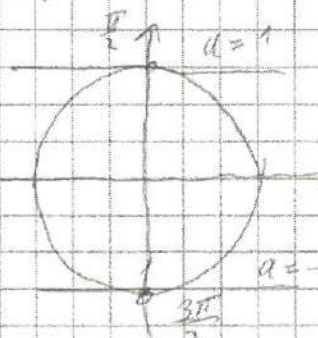
т.е. по 4 корня на каждую
и 2 корня для ветвления
 $[0; \pi]$

Получаем $5 \cdot 4 + 2 = 22$ корня

т.е. для $0 < a < 1$ будет 22 корня

Теперь $a = 1$

$\sin \theta = 1$
 $\sin \theta = -1$



т.е. корнями будут
 $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$
т.е. на каждой точке
окружности по 2 корня и один
корень на конъюгированных
($\frac{3\pi}{2}$ выходит за пределы)

Получаем $5 \cdot 2 + 1 = 11$ корней

Получаем в итоге

При $a = 0$ 11 корней
При $0 < a < 1$ 22 корня
При $a = 1$ 11 корней

Ответ: при $a = 0$ 11 корней, при $0 < a < 1$ 22 корня
и при $a = 1$ 11 корней для $\lambda \in [0, 2\pi]$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

~~N 143~~ 3

$$x^2 y^2 < 2 - xy$$

стр. 5

Пусть $a = xy$, тогда

$$a^2 < 2 - a$$

$$a^2 + a - 2 < 0$$

$$(a+2)(a-1) < 0$$

$$a = -2 \quad a = 1$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -2 \quad 1 \end{array} \Rightarrow -2 < a < 1$$

И т.д. при $a \neq 0$, можно сказать, что

$y = \frac{a}{x}$, тогда получаем систему

$$\begin{cases} xy = a \\ -2 < xy < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = a \\ -2 < xy < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = a \\ 0 < xy < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = a \\ 0 < xy < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ при } a \neq 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a}{x} \end{cases}, \text{ при } a \in (-2; 0) \cup (0; 1)$$

Мы знаем, что $y = \frac{a}{x}$ — это гипербола и чем меньше a , тем больше она

сдвигается к началу координат (при $|a| > 0$)

Из этого можно сделать вывод, что при $a \geq 0$ $xy = 0$ займёт всю площадь от гиперболы $y = \frac{1}{x}$ до оси координат

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

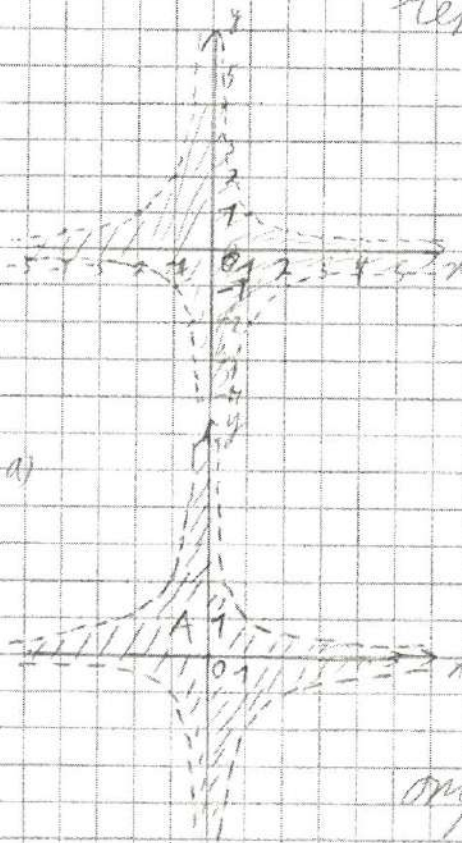
и згод

стр. 6

аналогично и для $a \leq b \leq 0$.

Можно получить точку множества, образуя черное гиперболами $y = \frac{2}{x}$ и

$y = \frac{1}{x}$, но эти гиперболы не будут принадлежать множеству.



На координатной плоскости видно, как выглядит множество и из его вида очевидно что всегда из любой точки можно провести отрезок из в $O(0;0)$ это надо доказать.

отрезок из точки гиперболы все время всегда лежит между гиперболами и осью координат, а значит любые две точки множества A можно соединить ломаной из двух звеньев (проходящей через $(0;0)$) и эта ломаная не будет выходить из множества A.

ч.т.д.

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

14
М.К. Любой $x \in \mathbb{R}$ можно представить
в виде $x = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и
 $\text{НОД}(p, q) = 1$ (взаимно простые), то
есть $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$, $c = \frac{p_3}{q_3}$
$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = \frac{p_1 q_2 q_3 \sqrt{2} + p_2 q_1 q_3 \sqrt{3} + p_3 q_1 q_2 \sqrt{6}}{q_1 q_2 q_3}$$

В числителе произведения при q всегда
будет целым числом, а знамен
сумма чисел в знаменателе всегда
будет иррациональным числом, так
как при $(a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \neq 0)$ мы будем
просто складывать и вычитать корни, но
только корни с равными по модулю, но
разными по знаку ^{числами} могут давать при
равенстве подкоренных выражений.

Однако потому иррациональное
число получится ^{н.р.} на рациональное
(в нашем случае натуральное) будет давать
иррациональное число, то остается
вариант $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = 0$

Пусть $c \neq 0$, тогда
$$\frac{a}{c}\sqrt{2} + \frac{b}{c}\sqrt{3} + \sqrt{6} = 0$$

Фамилию, имя, отчество **НЕ** писать! Лист **НЕ** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№4 проз

стр. 8

Замерим $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и при этом

$$x \in \mathbb{R} \text{ и } y \in \mathbb{R}.$$

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

$$y = -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x \text{ и чтобы } y \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$$

$$x = -\sqrt{3} - \text{противоречие.}$$

В другой ситуации $\sqrt{2}$ будет оставаться
целым или $\frac{1}{\sqrt{3}}$ будет делить из рациональ-
но числа иррациональное.

Аналогично и для $a \neq 0$, а для $b \neq 0$

Остаётся единственный вариант,

когда $a = b = c = 0$, а значит утвер-
ждение верно. ч.т.д.

Ответ: да.

№5

не обязательно

Директ образуют при плоской

расстановке плит, размерами

6 x 1 без пустых мест и из этого

не следует, что раз в комнате всего

3 двери, но возможно всего 3 окна.

Так как требуется замочить двери или

максимально все пол, то

Фамилию, имя, отчество **НЕ** писать! Лист **НЕ** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№5 проз

Стр. 9

каждый из нас нужно закрасить 32 клетки
точно столько черные! и 32 белых (белые
клетки), т. е. количество цветов
индивидуально и каждый цвет содержится
с другим и при этом под диплом
закладывает одну черную и одну белую
клетку (если наложить доску), то
а) цвета точно распределены равномерно,
а значит количество не закра-
шенных клеток равно (для одного цвета
(черного))

9
6

$$\left[\frac{32}{2} \right] : 3 \text{ т. е. для } n=8$$

нет обоснования

$$32 : 3 = 2 \quad (2 - \text{остаток от деления на 3})$$

А значит роз 2 белые, черные не закра-
шены, но еще 2 белые не будут
закрашены (2), а значит только
60 клеток станут закрашенными т. е.
30 дипломов всего.

Пример оптимального закрашивания
клетками 1x6

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3		
2	3	1	2	3	1		

цифры
это цвета

Ответ: 30 дипломов

Есть пример

Оценки: есть рассуждения,
но пропущен существенный кусок

+1/2