

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи — будущее науки»

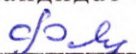
**Математическое и компьютерное моделирование
радуги**

Секция: математика

Научный руководитель:

Февральских Любовь Николаевна

(доцент кафедры ТКиЭМ ИИТММ ННГУ им. Н.И. Лобачевского,
кандидат физико-математических наук)

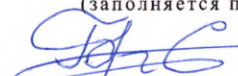

(подпись)

Февральских Л.Н.
(расшифровка подписи)

Количество баллов,
полученных на защите

90
(заполняется председателем жюри)

Председатель жюри


(подпись)

Бородинский С.Е.
(расшифровка подписи)

Работу выполнила учащаяся 11 класса

Муниципальное автономное
общеобразовательное учреждение
«Лицей №38»

(полное наименование учебного заведения)

г. Нижний новгород
(название населенного пункта)

Разина Вера Александровна
(Ф.И.О. учащегося ПОЛНОСТЬЮ)

Саров
2025 год

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. О радуге, как объекте исследования	4
1.1 История объяснения радуги.....	4
1.2 Постановка задачи	6
Глава 2. Теоретические сведения	8
2.1 Некоторые сведения из аналитической геометрии	8
2.2 Уравнение касательной	11
2.3 Дисперсия света. Коэффициенты преломления	13
Глава 3. Математическое моделирование хода лучей.....	17
3.1 Уравнение касательной к профилю капли	17
3.2 Преломление луча.....	18
3.3 Отражение луча внутри капли.....	24
3.4 Второе преломление луча	28
Глава 4. Исследование хода лучей для прямой и перевернутой радуги	32
4.1 Прямая радуга.....	32
4.2 Перевернутая радуга.....	36
Глава 5. Компьютерная реализация	41
5.1 Однократное отражение луча внутри капли	41
5.2 Двукратное отражение внутри капли.....	45
Заключение	50
Список используемой литературы	51

Введение

Радуга – великолепное явление, которое захватывает внимание и вдохновляет нас своей красотой и загадочностью. Это сложная оптическая иллюзия, она образуется при взаимодействии солнечного света и водных капель в атмосфере Земли. Изучение механизма образования радуги является актуальной и важной задачей. Оно предоставляет возможность лучше понять законы природы и использовать этот знакомый всем феномен в практических сферах. Исследования в этой области помогут углубить наши знания о природе света и оптики, улучшить технологии и обеспечить дополнительные перспективы развития.

Целью данной работы является исследование хода лучей видимого спектра при отражении внутри капли и двукратном преломлении в зависимости от положения источника света, объяснение и демонстрация возникновения прямой и перевернутой радуги.

Задачи исследования:

1. Провести математическое моделирование прямой радуги, получающейся в результате одного отражения и двух преломлений лучей спектра;
2. Описать механизм возникновения перевернутой радуги при двух отражениях и двух преломлениях лучей спектра;
3. Определить углы наклона выходящих лучей спектра к горизонту в случае прямой и перевернутой радуги;
4. Написать программу в среде MatLab, демонстрирующую ход лучей видимого спектра для случая одного и двух отражений внутри капли.

Методы исследования:

При построении лучей видимого спектра в случае отражений и преломлений использовались **методы аналитической геометрии**, в частности общее уравнение прямой на плоскости, уравнение прямой, проходящей через две точки, уравнение прямой, проходящей через точку, в направлении заданного вектора. Для построения уравнения касательной к окружности (профилю капли) использовалось **понятие производной функции**. Для компьютерного моделирования хода лучей использовался **язык среды MatLab**.

Глава 1. О радуге, как объекте исследования

1.1 История объяснения радуги

Такое сложное оптическое явление, как радуга, стали изучать в глубокой древности. О законах оптики, природе и свойствах света тогда знали крайне мало. Некоторые факты были известны ученым древней Греции. Евклид знал о законе отражения света, Аристотель изучал явление преломления света, а знаменитый астроном древности Птолемей измерял углы падения и преломления света. Законами света занимались и многие европейские ученые средневековья. Они исследовали действие линз, и также пытались объяснить явление радуги.

Первым объяснить возникновение радуги пытался древнегреческий философ Аристотель. Немецкий монах Теодорик был первым, кто понял причину появления радуги, в 1304 г. он воссоздал радугу на сферической колбе с водой. Но открытие Теодорика было забыто.

Общая физическая картина радуги была описана в 1611 году Марком Антониом де Доминисом. На основании опытных наблюдений он пришёл к заключению, что радуга получается в результате отражения света от внутренней поверхности капли дождя и двукратного преломления — при входе в каплю и при выходе из неё.

Рене Декарт в своих трудах дал более полное объяснение радуги в 1637 году. Он провел исследование формы радуги, используя стеклянный шар, наполненный водой. Такое «устройство» дало возможность представить то, как отражается луч света в капле дождя, преломляясь и тем самым становясь видимым. Декарт установил, что угол выхода луча из капли равный 41,5 градуса к первоначальному их направлению является преобладающим для лучей (рис. 1). Он также установил, что вторичная радуга возникает в результате двух преломлений и двух отражений, а лучи в этом случае выходят из капли в основном под углом 51–52 градуса к первоначальному направлению (рис. 1).

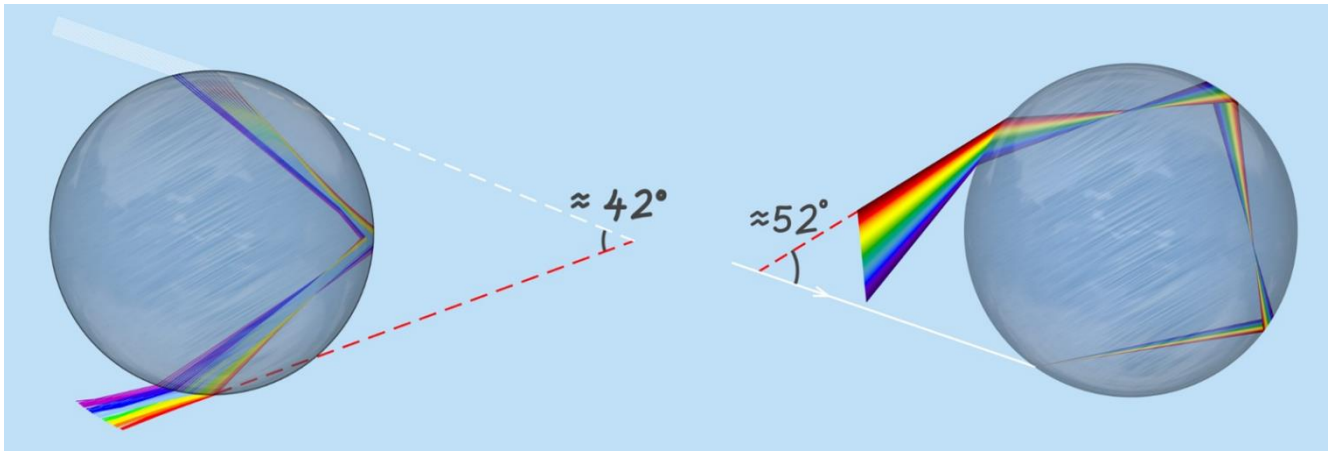


Рис. 1. Объяснение явления прямой и перевернутой радуги

Исаак Ньютон в своём трактате дополнил теорию Декарта тем, что разъяснил причины возникновения цветов радуги и объяснил противоположный порядок расположения цветов в радугах первого и второго порядков. Ньютон доказал, что белый цвет — это смесь семи цветов: красного, оранжевого, жёлтого, зелёного, голубого, синего и фиолетового. Главной его целью было выяснить, почему призма, поставленная на пути солнечных лучей, преобразует белый солнечный свет в спектр — цветовой ряд, в котором все цвета следуют один за другим в неизменном порядке. На основе проведенных опытов Ньютон открыл неизвестные ранее законы, которым подчиняется свет, и первым попытался научно объяснить его природу. Встречая на своем пути две среды, отличающиеся друг от друга оптическими свойствами, лучи света изменяют свое направление при переходе из одной в другую — преломляются. Чем сильнее отличаются по своим свойствам среды, через которые проходит свет, тем больше преломление.

1.2 Постановка задачи

Рассмотрим сферическую каплю, находящуюся перед наблюдателем. Пусть источник света расположен за спиной наблюдателя. Лучи света падают на каплю либо выше прямой AB , проходящей через центр симметрии капли параллельно световому потоку (рис. 2), либо ниже этой прямой (рис. 3).

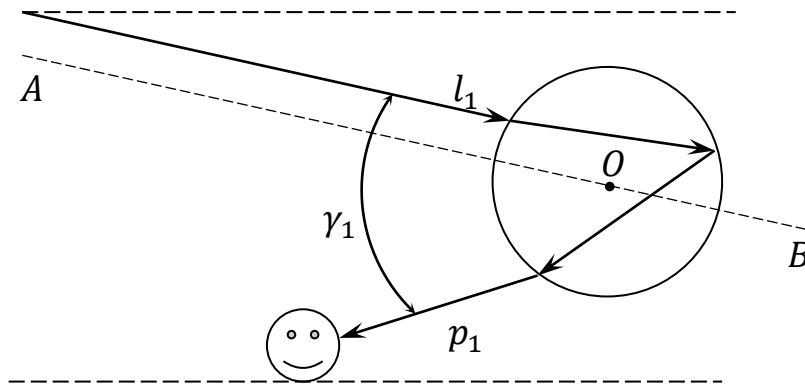


Рис. 2. Порядок хода «верхнего» луча при однократном отражении.

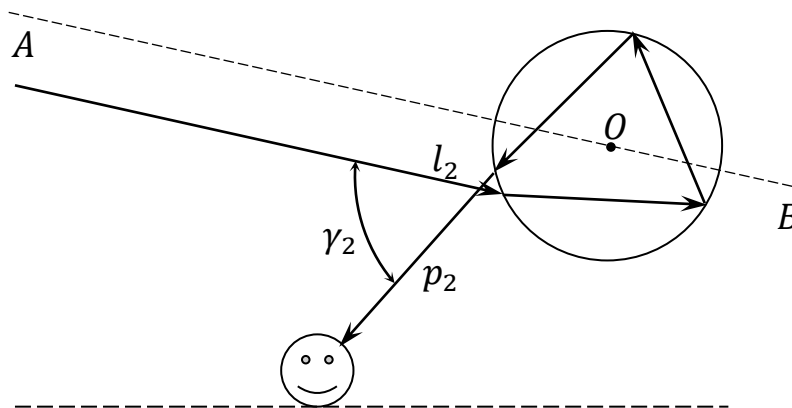


Рис. 3. Порядок хода «нижнего» луча при двукратном отражении

Луч, попадая в каплю, распадается на спектр. Для простоты изложения на рисунках 2 и 3 показан только один из лучей видимого спектра. Луч, переходя из воздушной среды в воду, преломляется, затем отражается один или несколько раз от внутренней поверхности капли и снова преломляется, переходя в воздушную среду. Выходящие лучи спектра, попадая в поле зрения наблюдателя, формируют оптическую иллюзию, называемую радугой.

В данной работе покажем, что в случае хода светового луча l_1 выше, одного отражения и последующего преломления мы будем наблюдать радуку в прямом порядке (красный, оранжевый, ..., синий, фиолетовый), а в случае луча l_2 , проходящего ниже прямой AB , двух отражений и преломления, радуга будет перевернутой (фиолетовый, синий, ..., оранжевый, красный).

Также исследуем ход лучей для случаев, представленных на рис. 2 и 3, в зависимости от удаления луча от прямой AB и получим значения углов γ_1 и γ_2 между входящими в каплю лучами l_1 и l_2 и лучами p_1 и p_2 , выходящими к наблюдателю.

Для демонстрации хода лучей видимого спектра приведем результаты тестирования программы, написанной в среде MatLab.

Далее, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что входящий в каплю луч расположен горизонтально. Этого всегда можно добиться выбором системы координат.

В работе рассматривается плоская задача. Отметим, что подобное исследование можно провести в случае трехмерного пространства, используя уравнения сферы, касательной плоскости, уравнений прямых в пространстве.

Глава 2. Теоретические сведения

2.1 Некоторые сведения из аналитической геометрии

2.1.1 Уравнение прямой на плоскости

Прямая – это геометрическое место точек, расположенных в одну линию, не имеющую ни начала, ни конца. Каждая точка имеет свои координаты по осям абсцисс и ординат. Уравнение, которое описывает зависимость координат каждой точки прямой в декартовой системе Oxy , будет являться общим уравнением прямой на плоскости.

1) Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$

Уравнение, имеющее вид $Ax + By + C = 0$ – это общее уравнение прямой на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy .

A, B, C – произвольные числа, не равные нулю одновременно

Прямая, заданная уравнением вида $Ax + By + C = 0$, имеет нормальный вектор прямой с координатами (A, B) .

$\vec{n}(A; B)$ – нормаль к прямой

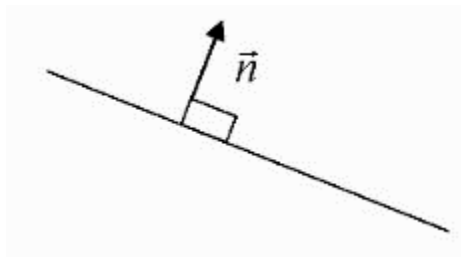


Рис. 4. Прямая на плоскости и нормаль к ней

Табл. 1. Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

Коэффициенты	Вид уравнения	Графическое расположение
$A = 0, B \neq 0, C \neq 0$	$y = -\frac{C}{B}$	Прямая, параллельная оси Ox
$A \neq 0, B = 0, C \neq 0$	$x = -\frac{C}{A}$	Прямая, параллельная оси Oy
$A \neq 0, B \neq 0, C = 0$	$Ax + By = 0$	Прямая проходит через начало координат
$A = 0, B \neq 0, C = 0$	$y = 0$	Уравнение оси Ox
$A \neq 0, B = 0, C = 0$	$x = 0$	Уравнение оси Oy

2) Уравнение прямой в каноническом виде

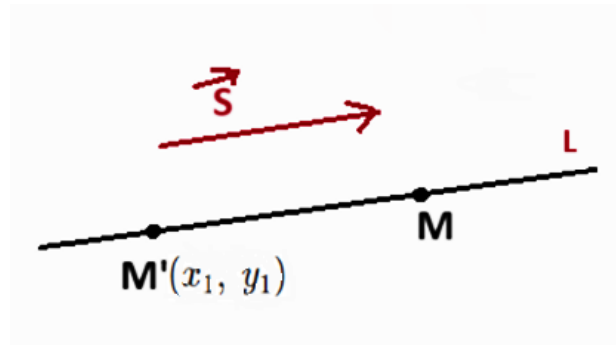


Рис. 5. Прямая, проходящая через точку M' в направлении вектора \vec{s}

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую l .

Точка $M'(x_1; y_1) \in l$

Ненулевой вектор $\vec{s} = (p; q)$ параллелен прямой l (рис.5). В этом случае вектор \vec{s} называют направляющим вектором прямой l .

При таких условиях произвольная точка $M(x; y) \in l$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M'M} = (x - x_1; y - y_1)$ коллинеарен вектору \vec{s} , т.е. их координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \quad (1)$$

Уравнение (1) называют каноническим уравнением прямой l .

При записи уравнения прямой в каноническом виде, допускается, чтобы один из чисел q и p была равна нулю (одновременно q и p не могут быть равным нулю, т.к. направляющий вектор прямой не должен быть нулевым вектором). Равенство нулю одного из знаменателей означает равенство нулю соответствующего числителя.

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая l задается двумя точками: $M'(x_0; y_0) \in l$ и $M(x_1; y_1) \in l$. Тогда вектор $\overrightarrow{M'M}$ является направляющим вектором прямой l .

Составим уравнение прямой l , проходящей через точку $M'(x_0; y_0)$ и имеющий направляющий вектор $\overrightarrow{M'M} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (2)$$

Уравнение (2) называют уравнением прямой, проходящей через две точки.

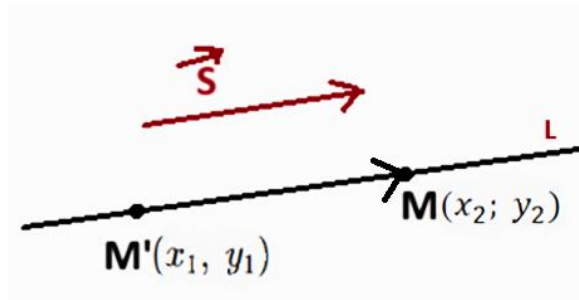


Рис. 6. Прямая, проходящая через точки M и M'

4) Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \alpha.$$

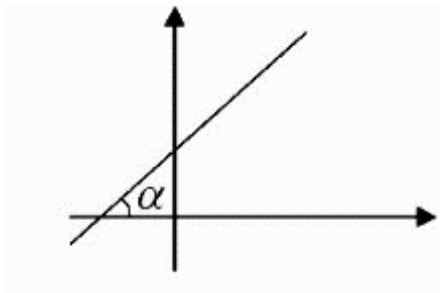


Рис. 7. Прямая с угловым коэффициентом

x и y – это переменные, k и b – это некоторые действительные числа, из которых k представляет собой угловой коэффициент. В этих уравнениях переменная y является функцией аргумента x .

2.1.2 Уравнение окружности

Окружностью называется плоская кривая, состоящая из множества всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой центром, на некоторое расстояние R , называемое радиусом.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$. Тогда по определению окружности для любой точки $M(x; y)$, принадлежащей ей, выполняется равенство $M_0M = |\overrightarrow{M_0M}| = R$.

Воспользуемся формулой вычисления длины вектора:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

Отсюда следует, что

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (3)$$

Уравнение (3) называется каноническим уравнением окружности с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$, и радиусом R (рис. 8).

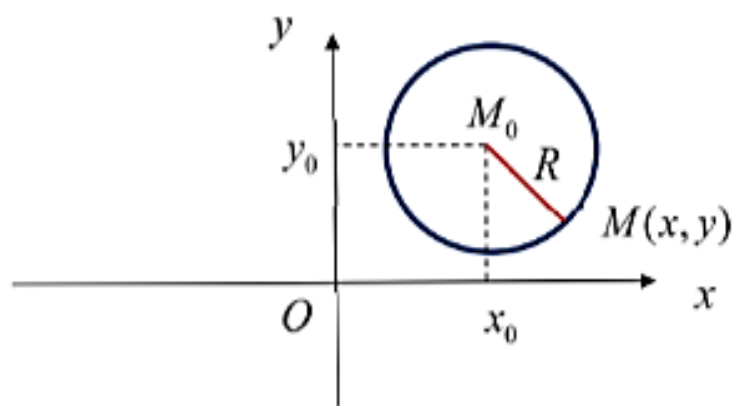


Рис. 8. Окружность с центром в точке M_0 радиуса R

В частности, уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R есть $x^2 + y^2 = R^2$.

2.1.3 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}).$$

Угол между векторами.

Угол ϕ между двумя ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} определяется по формуле:

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

2.2 Уравнение касательной

Уравнение касательной – это уравнение прямой, которая касается графика функции в определенной точке и имеет тот же наклон, что и график функции в этой точке.

Для того чтобы найти уравнение касательной к графику функции в определенной точке, необходимо знать координаты этой точки и наклон функции в этой точке.

Наклон касательной можно найти, используя производную функции в данной точке. Производная функции показывает скорость изменения функции в

каждой точке. Таким образом, наклон касательной равен значению производной функции в данной точке.

Точку пересечения касательной с осью y можно найти, подставив координаты данной точки в уравнение касательной и решив его относительно b .

Уравнение касательной к графику функции имеет несколько свойств, которые помогают нам понять его геометрическое представление.

- Наклон касательной

Уравнение касательной содержит коэффициент наклона, который определяет угол наклона касательной к оси x . Если коэффициент наклона положительный, то касательная наклонена вверх, если отрицательный – вниз. Значение коэффициента наклона можно найти, используя производную функции в данной точке.

- Точка пересечения с осью y

Уравнение касательной содержит точку пересечения с осью y , которая обозначается как b . Эта точка показывает, где касательная пересекает вертикальную ось. Чтобы найти точку пересечения с осью y , нужно подставить координаты данной точки в уравнение касательной и решить его относительно b .

- Графическое представление

Графическое представление уравнения касательной позволяет наглядно представить, как касательная линия проходит через график функции в определенной точке.

Точка на графике, через которую будет проходить касательная, будет иметь координаты $(x_0, f(x_0))$, где x_0 – значение аргумента функции, а $f(x_0)$ – значение функции в этой точке.

Производная функция в этой точке показывает наклон касательной. Используя наклон касательной и координаты точки, можно записать уравнение касательной в виде $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Используя полученное уравнение, можно построить график уравнения касательной. Этот график будет представлять собой прямую линию, которая

проходит через выбранную точку и имеет тот же наклон, что и касательная к графику функции в этой точке.

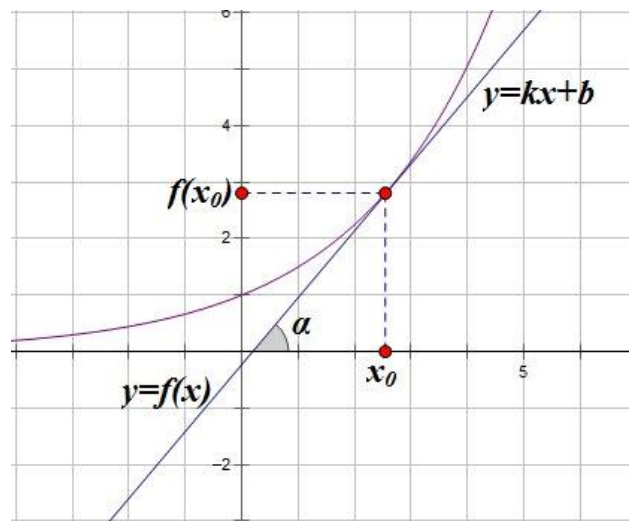


Рис. 9. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$

Графическое представление уравнения касательной помогает наглядно понять, как касательная линия связана с графиком функции и как она изменяется в разных точках.

2.3 Дисперсия света. Коэффициенты преломления

Радуга – атмосферное, оптическое метеорологическое явление, наблюдаемое при освещении ярким источником света множества водяных капель. Увидеть радугу можно при высокой влажности воздуха, обычно после или во время дождя, при условии, что солнце свободно проникает сквозь облака и находится за спиной наблюдателя.

Радуга появляется благодаря преломлению солнечного света в каплях воды, которые содержатся в атмосфере в виде пара.

В 1665–1667 годах Исаак Ньютон – английский физик и математик, занимаясь усовершенствованием телескопов, обратил внимание на то, что изображение, даваемое объективом, по краям окрашено. Данное наблюдение вызвало у него большой интерес, и он решил разгадать природу возникновения цветных полос. Исследуя природу цветов, Ньютон выполнил комплекс оптических экспериментов. Некоторые из них до сих пор используются в физических лабораториях. Главный опыт Ньютона заключался в том, что он, проделав небольшое отверстие в ставне окна затемнённой комнаты, поставил

стеклянную призму на пути пучка лучей, проходивших через это отверстие. На противоположной стене он получил изображение в виде полосы чередующихся цветов – спектр.

Спектр – (от латинского «spectrum» – видение) непрерывный ряд цветных полос, получается путем разложения луча белого света на составные части.

Изменение направления распространения волны при прохождении из одной среды в другую называется преломлением. Проходя через призму, луч солнечного света не только преломляется, но и разлагается на различные цвета, это явление называется дисперсией.

Дисперсия – разложение света на спектральные цвета при прохождении через оптически плотное вещество вследствие зависимости показателя преломления и скорости света в веществе от частоты (или длины) световой волны. Явление дисперсии возникает в связи с тем, что световые лучи с разной длиной волны имеют различную скорость распространения в оптической среде.

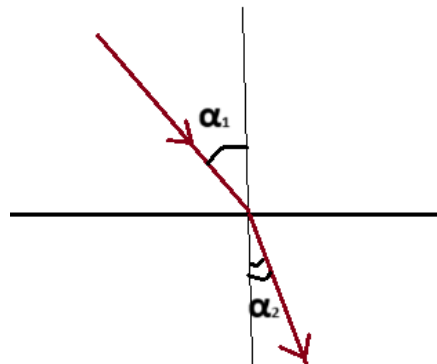


Рис. 10. Преломление луча

Закон преломления света:

Падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для двух данных сред:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{21}.$$

Постоянная величина n_{21} называется относительным показателем преломления или показателем преломления второй среды относительно первой.

Экспериментально установлено, что для любых двух сред 1 и 2 справедливо соотношение:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Поэтому закон преломления света можно записать в виде:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Из последней формулы следует, что при преломлении света (так же, как и при отражении) выполняется принцип обратимости хода световых лучей. То есть луч 2', пущенный во второй среде в направлении, противоположном преломленному лучу 2, будет распространяться в первой среде в направлении 1', противоположном направлению падающего луча 1 (рис. 11).

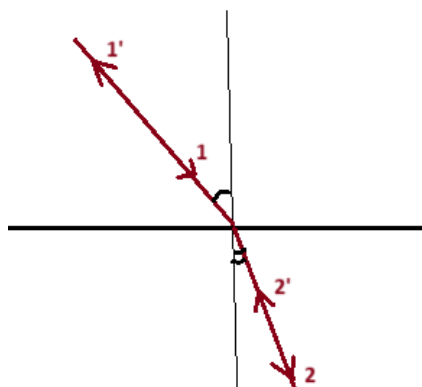


Рис. 11. Обратимость хода световых лучей

Абсолютный показатель преломления – физическая величина, равная отношению синуса угла падения луча к синусу угла преломления при переходе луча из вакуума в эту среду. Чем больше у вещества показатель преломления, тем более оптически плотным считается это вещество.

Преломление света при переходе из одной среды в другую вызвано различием в скоростях распространения света в той и другой среде. Это было доказано французским математиком Пьером Ферма и голландским физиком Христианом Гюйгенсом. Они доказали, что отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных двух сред, равная отношению скоростей света в этих средах:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Скорость света в любом веществе меньше скорости света в вакууме. Причиной уменьшения скорости света в среде является взаимодействие световой волны с атомами и молекулами вещества. Чем сильнее взаимодействие, тем больше оптическая плотность среды, и тем меньше скорость света.

Абсолютный показатель преломления определяется скоростью распространения света в данной среде, которая зависит от физического состояния среды. Показатель преломления зависит также и от характеристик самого света. Для красного света он меньше, чем для зеленого, а для зеленого— меньше, чем для фиолетового.

Табл. 2. Показатели преломления для разных цветов:

Цвет	Показатель преломления в воде
Красный	1,3311
Оранжевый	1,3323
Желтый	1,3330
Зеленый	1,3345
Голубой	1,3371
Синий	1,3380
Фиолетовый	1,3428

Глава 3. Математическое моделирование хода лучей

3.1 Уравнение касательной к профилю капли

Запишем уравнение окружности:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$
$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f_0(x_0))$ принимает вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

В качестве точки $(x_0, f_0(x_0))$ возьмем точку пересечения входящего в каплю луча света, параллельного оси Ox (рис. 12).

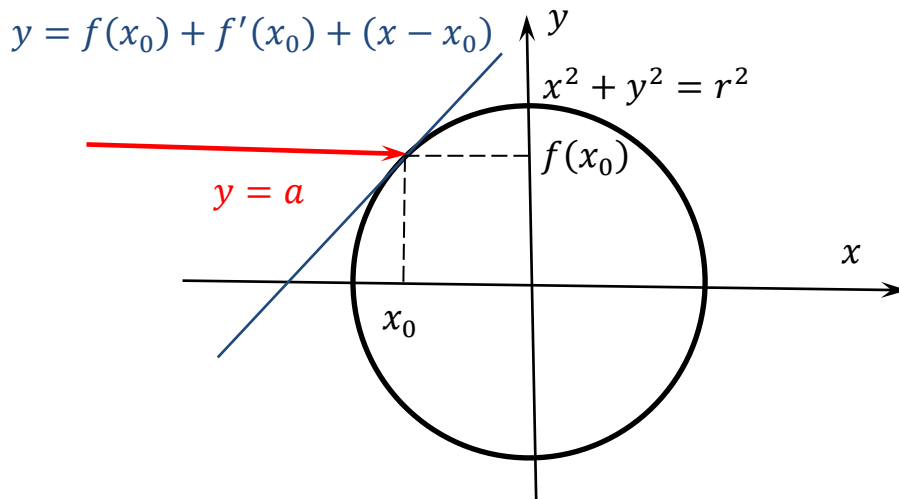


Рис. 12. Построение касательной к окружности в точке пересечения с ней луча

Запишем координаты точки пересечения с окружностью входящего слева светового луча, имеющего уравнение $y = a$, где a может принимать значения из промежутка $[-r, r]$:

$$x_0 = -\sqrt{r^2 - a^2}, \quad y_0 = a.$$

Запишем уравнение окружности в явном виде, т.е. в виде $y = f(x)$:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

или

$$f(x) = \pm\sqrt{g(x)}.$$

Функция $f(x)$ иррациональная. Из таблицы производных функций находим производную.

$$f'(x) = \pm \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}, \quad g(x) = r^2 - x^2.$$

Находим $g'(x)$.

r - константа, тогда $(r^2)' = 0$. Производная от x^2 равна $2x$.

Получаем $g'(x) = -2x$.

Тогда производная $f'(x)$ равна:

$$f'(x) = \pm \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Уравнение касательной к графику окружности в точке с координатами $x_0 = -\sqrt{r^2 - a^2}$, $y_0 = a$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{r^2 - (r^2 - a^2)} + \left(\mp \frac{(-\sqrt{r^2 - a^2})}{\sqrt{r^2 - (r^2 - a^2)}} \right) \cdot (x + \sqrt{r^2 - a^2}) = \\ &= \pm |a| \pm \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{|a|} \cdot (x + \sqrt{r^2 - a^2}) = \pm \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{|a|} \cdot x \pm \left(|a| + \frac{r^2 - a^2}{|a|} \right) = \\ &= \pm \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{|a|} \cdot x \pm \frac{r^2}{|a|}. \end{aligned}$$

Знак "+" отвечает уравнению касательной к верхней полуокружности, т.е. значениям параметра $a > 0$, знак "-" соответствует касательной к нижней полуокружности, т.е. значениям $a < 0$. Следовательно, уравнение касательной к левой половине окружности можно записать в виде:

$$y = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \cdot x + \frac{r^2}{a}.$$

3.2 Преломление луча

Луч света, входящий в каплю воды, преломляется при попадании в водную среду из воздушной. Чтобы построить преломленный луч, нужны построения касательной и перпендикуляра к этой касательной (общей нормали к касательной и к окружности в точке касания).

Уравнение касательной к окружности в точке «входа» светового луча (см. часть 3.1):

$$l: \quad y = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \cdot x + \frac{r^2}{a}.$$

Для построения нормали, записываем уравнение касательной в общем виде ($Ax + By + C = 0$):

$$\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \cdot x - y + \frac{r^2}{a} = 0.$$

Вектор нормали к прямой l :

$$\vec{n} = \{A; B\},$$

$$\vec{n} = \left\{ \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}; -1 \right\}.$$

Уравнение нормали к прямой l (уравнение прямой m) в каноническом виде:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B},$$

где

$$x_0 = -\sqrt{r^2 - a^2}, \quad y_0 = a.$$

Подставим координаты точки (x_0, y_0) в уравнение прямой m :

$$\frac{x + \sqrt{r^2 - a^2}}{\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}} = \frac{y - a}{-1},$$

$$-x - \sqrt{r^2 - a^2} = y \cdot \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \sqrt{r^2 - a^2}.$$

В итоге получим прямую, проходящую через начало координат (геометрический центр капли):

$$m: \quad y = \frac{-a \cdot x}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

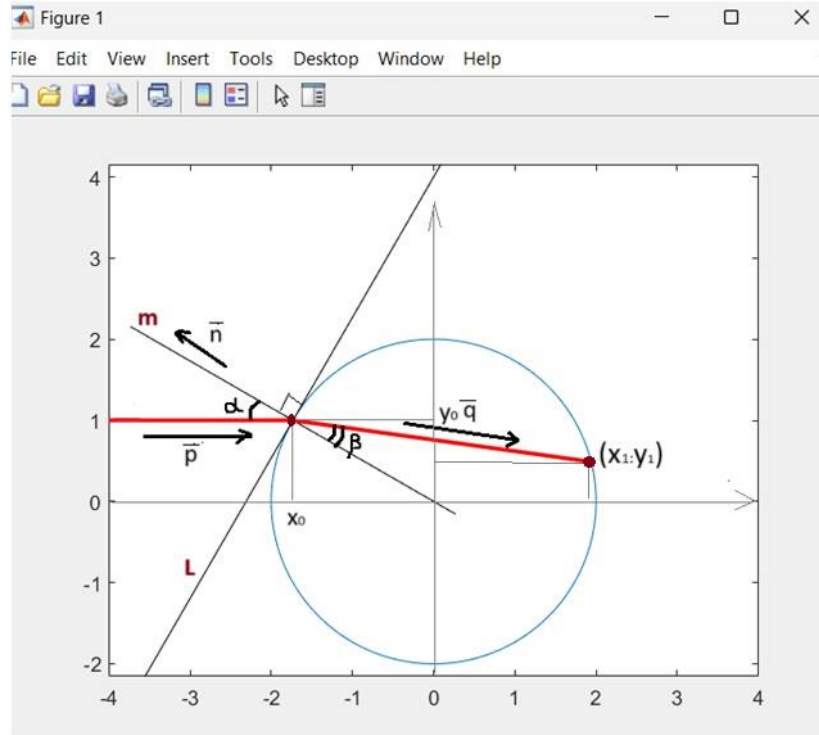


Рис. 13. Построение преломленного луча

Коэффициент преломления:

$$N = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

где $\sin \alpha$ - синус угла между входящим лучом и нормалью, $\sin \beta$ – синус угла между преломленным лучом и нормалью.

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{N}.$$

Угол между преломленным лучом и нормалью равен:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{N}\right).$$

Запишем скалярное произведение векторов \vec{p} и \vec{n} , где \vec{p} – направляющий вектор входящего в каплю луча, \vec{n} - вектор нормали к касательной:

$$\vec{p} = \{p_1, p_2\} = \{1; 0\}, \quad \vec{n} = \{n_1, n_2\} = \left\{ \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}; -1 \right\},$$

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = |\vec{p}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha,$$

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2,$$

Приравняв правые части в записи скалярного произведения, мы можем вычислить косинус угла α :

$$\cos \alpha = \frac{p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2}{|\vec{p}| \cdot |\vec{n}|},$$

$$\cos \alpha = \frac{p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2}},$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right).$$

Запишем скалярное произведение векторов \vec{n} и \vec{q} , где \vec{q} – направляющий вектор преломленного луча. Угол между данными векторами равен $\pi - \beta$.

$$\vec{n} \cdot \vec{q} = |\vec{n}| \cdot |q| \cdot \cos(\pi - \beta),$$

$$\vec{n} \cdot \vec{q} = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2.$$

Приравняв правые части в записи скалярного произведения векторов \vec{n} и \vec{q} , получим уравнение:

$$n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 = |\vec{n}| \cdot |q| \cdot \cos(\pi - \beta).$$

Для однозначности определения неизвестных координат вектора \vec{q} добавим к полученному уравнению условие нормировки вектора \vec{q} , т.е. будем считать, что он имеет единичную длину:

$$\begin{cases} n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 = |\vec{n}| \cdot |q| \cdot \cos(\pi - \beta), \\ q_1^2 + q_2^2 = 1. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения неизвестную q_1 и подставим во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{|\vec{n}| \cdot \cos(\pi - \beta) - n_2 \cdot q_2}{n_1}, \\ \left(\frac{|\vec{n}| \cdot \cos(\pi - \beta) - n_2 \cdot q_2}{n_1} \right)^2 + q_2^2 = 1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение относительно неизвестной q_2 :

$$\left(\frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos(\pi - \beta) - n_2 \cdot q_2}{n_1} \right)^2 + q_2^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot (-\cos \beta) + q_2}{n_1} \right)^2 + q_2^2 = 1,$$

$$\frac{q_2^2 - 2\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos \beta \cdot q_2 + (n_1^2 + n_2^2) \cdot \cos^2 \beta}{n_1^2} + q_2^2 = 1,$$

$$q_2^2 - 2\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos \beta \cdot q_2 + (n_1^2 + n_2^2) \cdot \cos^2 \beta + n_1^2 \cdot q_2^2 - n_1^2 = 0.$$

Сгруппируем коэффициенты перед одинаковыми степенями q_2 :

$$(1 + n_1^2) \cdot q_2^2 - 2\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos \beta \cdot q_2 + (n_1^2 + n_2^2) \cdot \cos^2 \beta - n_1^2 = 0.$$

Полученное уравнение является квадратным относительно неизвестной q_2 .

Корни уравнения имеют следующий вид:

$$q_2 = \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos \beta}{1 + n_1^2} \pm \frac{\sqrt{(n_1^2 + n_2^2) \cdot \cos^2 \beta - (1 + n_1^2) \cdot ((n_1^2 + n_2^2) \cdot \cos^2 \beta - n_1^2)}}{1 + n_1^2}.$$

Знак корня определяется с учетом желаемого направления вектора \vec{q} . К примеру, на рис. 13 представлен ход луча света при переходе из воздушной среды в водную. Показанному на рис. 13 вектору \vec{q} соответствует корень, имеющий отрицательную проекцию на ось Oy . Поэтому при выборе знака нужно учитывать это ограничение ($q_2 < 0$).

По найденному q_2 определяется проекция вектора \vec{q} на ось Ox – неизвестная q_1 :

$$q_1 = -\frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos \beta + n_2 \cdot q_2}{n_1}.$$

Запишем в каноническом виде уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) в направлении вектора \vec{q} – преломленного луча:

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2},$$

$$y - y_0 = \frac{(x - x_0) \cdot q_2}{q_1},$$

Для нахождения координат второй точки пересечения прямой (преломленного луча) и окружности запишем систему:

$$\begin{cases} y = y_0 + \frac{(x - x_0) \cdot q_2}{q_1}, \\ r^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Систему решаем методом подстановки:

$$r^2 = x^2 + \left(y_0 + \frac{(x - x_0) \cdot q_2}{q_1}\right)^2,$$

$$r^2 = x^2 + \left(y_0^2 + 2 \cdot y_0 \cdot \frac{(x - x_0) \cdot q_2}{q_1} + \frac{(x - x_0)^2 \cdot q_2^2}{q_1^2}\right).$$

Раскрываем скобки:

$$0 = x^2 + y_0^2 + \frac{2y_0q_2x}{q_1} - \frac{2y_0q_2x_0}{q_1} + \frac{q_2^2x^2}{q_1^2} - \frac{-2xx_0q_2^2}{q_1^2} + \frac{q_2^2x_0^2}{q_1^2} - r^2,$$

Решаем квадратное уравнение относительно x :

$$0 = x^2 \cdot \left(1 + \frac{q_2^2}{q_1^2}\right) + x \cdot \left(\frac{2y_0q_2}{q_1} - \frac{-2x_0q_2^2}{q_1^2}\right) + \left(\frac{q_2^2x_0^2}{q_1^2} - \frac{2y_0q_2x_0}{q_1} - r^2 + y_0^2\right).$$

Запишем последнее уравнение в виде:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

где

$$A = \left(1 + \frac{q_2^2}{q_1^2}\right),$$

$$B = \left(\frac{2y_0q_2}{q_1} - \frac{-2x_0q_2^2}{q_1^2}\right),$$

$$C = \left(\frac{q_2^2x_0^2}{q_1^2} - \frac{2y_0q_2x_0}{q_1} - r^2 + y_0^2\right).$$

Из двух полученных корней квадратного уравнения выбираем больший корень, т.к. вторая точка пересечения прямой с окружностью располагается правее точки (x_0, y_0) :

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

По найденному решению x_1 находим ординату точки:

$$y_1 = \frac{(x_1 - x_0) \cdot q_1}{q_2} + y_0.$$

3.3 Отражение луча внутри капли

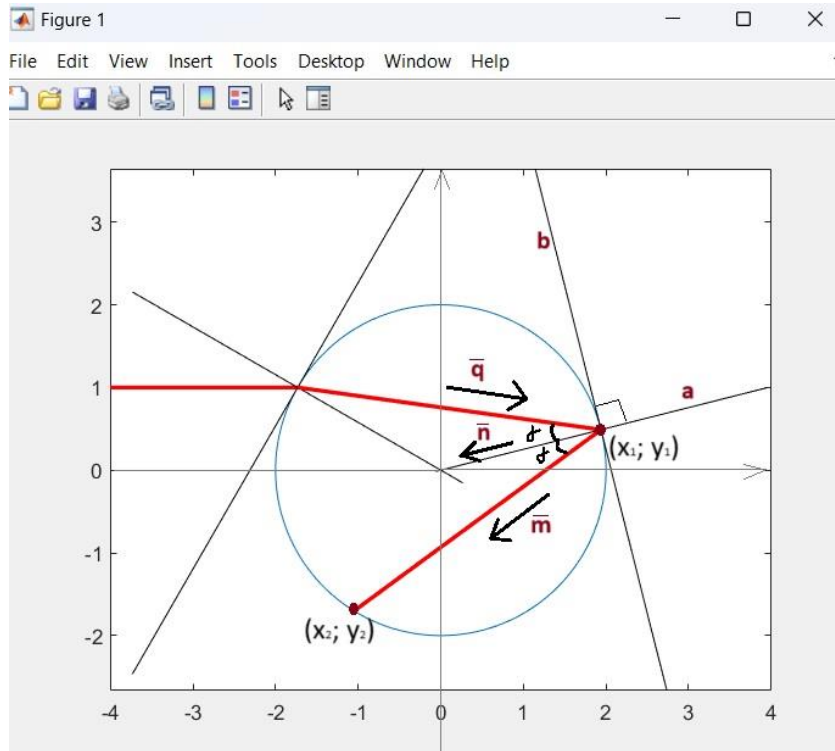


Рис.14. Построение отраженного луча

В зависимости от знака ординаты y_1 координаты точки, в которой происходит отражение луча, будут иметь вид:

$$(x_1; y_1) = (x_1; \text{sign}(y_1)\sqrt{r^2 - x_1^2}),$$

где функция $\text{sign}(y_1)$ – функция знака:

$$\text{sign}(y_1) = \begin{cases} 1, y_1 > 0 \\ -1, y_1 < 0 \\ 0, y_1 = 0 \end{cases}.$$

Вычислим производную функции, задающей окружность:

$$f'(x) = \pm \frac{-2x_1}{2\sqrt{r^2 - x_1^2}} = \mp \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}},$$

где знак (+) отвечает верхней половине окружности, а (-) – нижней.

Уравнение касательной b к окружности в точке отражения луча для случая касания верхней половины окружности или нижней половины:

$$b: y = \mp \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \cdot x \pm \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}.$$

Запишем это уравнение, используя функцию знака:

$$b: \quad y = -\operatorname{sign}(y_1) \cdot \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \cdot x + \operatorname{sign}(y_1) \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}.$$

Представим уравнение прямой b (касательной) в общем виде:

$$\operatorname{sign}(y_1) \cdot \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \cdot x + y - \operatorname{sign}(y_1) \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} = 0.$$

Вектор нормали к этой прямой будет иметь координаты:

$$\vec{n} = \{n_3, n_4\} = \left\{ \operatorname{sign}(y_1) \cdot \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}; 1 \right\}.$$

Уравнение нормали к прямой b (уравнение прямой a) в каноническом виде:

$$\frac{x - x_1}{n_3} = \frac{y - y_1}{n_4},$$

$$y = \frac{(x - x_1) \cdot n_4}{n_3} + y_1.$$

Вычислим угол между преломленным лучом и нормалью к окружности в точке отражения луча:

$$\cos(\widehat{\vec{q}; \vec{n}}) = \cos(\pi - \gamma),$$

$$\cos(\widehat{\vec{q}; \vec{n}}) = \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{q_1 \cdot n_3 + q_2 \cdot n_4}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2} \cdot \sqrt{n_3^2 + n_4^2}}.$$

По закону отражения угол между нормалью и отраженным лучом также будет равен γ :

$$\cos(\widehat{\vec{n}; \vec{m}}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \cos \gamma.$$

Для однозначности определения неизвестных координат вектора \vec{m} добавим к полученному уравнению условие нормировки вектора \vec{m} , т.е. будем считать, что он имеет единичную длину:

$$\begin{cases} \frac{m_1 \cdot n_3 + m_2 \cdot n_4}{\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = \cos \gamma, \\ \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = 1. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения неизвестную m_1 и подставим во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos \gamma - m_2 \cdot n_4}{n_3}, \\ \left(\frac{\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos \gamma - m_2 \cdot n_4}{n_3} \right)^2 + m_2^2 = 1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение относительно неизвестной m_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos(\gamma) - m_2 \cdot n_4}{n_3} \right)^2 + m_2^2 &= 1, \\ \left(\frac{\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos(\gamma) - m_2}{n_3} \right)^2 + m_2^2 &= 1, \end{aligned}$$

$$\frac{m_2^2 - 2\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos \gamma \cdot m_2 + (n_3^2 + n_4^2) \cdot \cos^2 \gamma}{n_3^2} + m_2^2 = 1,$$

$$m_2^2 - 2\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos \beta \cdot m_2 + (n_3^2 + n_4^2) \cdot \cos^2 \beta + n_3^2 \cdot m_2^2 - n_3^2 = 0.$$

Сгруппируем коэффициенты перед одинаковыми степенями m_2 :

$$(1 + n_3^2) \cdot m_2^2 - 2\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos \gamma \cdot m_2 + (n_3^2 + n_4^2) \cdot \cos^2 \gamma - n_3^2 = 0.$$

Полученное уравнение является квадратным относительно неизвестной m_2 .

Корни уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos \gamma}{1 + n_3^2} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{(n_3^2 + n_4^2) \cdot \cos^2 \gamma - (1 + n_3^2) \cdot ((n_3^2 + n_4^2) \cdot \cos^2 \gamma - n_3^2)}}{1 + n_3^2}. \end{aligned}$$

Знак в выражении для m_2 выбирается в соответствии с принятой ориентацией вектора \vec{m} . Рис. 14 соответствует отрицательное значение проекции вектора \vec{m} на ось ординат Oy . По найденному m_2 определяется проекция вектора \vec{m} на ось Ox – неизвестная m_1 :

$$m_1 = \frac{\sqrt{n_3^2 + n_4^2} \cdot \cos \gamma - n_4 \cdot m_2}{n_3}.$$

Запишем в каноническом виде уравнение прямой, проходящей через точку (x_1, y_1) в направлении вектора \vec{m} – отраженного луча:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{m_2},$$

$$y = \frac{(x - x_1) \cdot m_2}{m_1} + y_1.$$

Для нахождения координат второй точки пересечения прямой (отраженного луча) и окружности запишем систему:

$$\begin{cases} y = \frac{(x - x_1) \cdot m_2}{m_1} + y_1 \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Решаем систему методом подстановки:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{(x - x_1) \cdot m_2}{m_1} + y_1 \right)^2,$$

$$r^2 = x^2 + \left(y_1^2 + 2 \cdot y_1 \cdot \frac{(x - x_1) \cdot m_2}{m_1} + \frac{(x - x_1)^2 \cdot m_2^2}{m_1^2} \right).$$

Раскрываем скобки:

$$0 = x^2 + y_1^2 + \frac{2y_1 m_2 x}{m_1} - \frac{2y_1 m_2 x_1}{m_1} + \frac{m_2^2 x^2}{m_1^2} - \frac{2x x_1 m_2^2}{m_1^2} + \frac{m_2^2 x_1^2}{m_1^2} - r^2,$$

Решаем квадратное уравнение относительно x :

$$0 = x^2 \cdot \left(1 + \frac{m_2^2}{m_1^2} \right) + x \cdot \left(\frac{2y_1 m_2}{m_1} - \frac{2x_1 m_2^2}{m_1^2} \right) + \left(\frac{m_2^2 x_1^2}{m_1^2} - \frac{2y_1 m_2 x_1}{m_1} - r^2 + y_1^2 \right).$$

Запишем последнее уравнение в виде:

$$A_1 x^2 + B_1 x + C_1 = 0,$$

где

$$A_1 = \left(1 + \frac{m_2^2}{m_1^2} \right),$$

$$B_2 = \left(\frac{2y_1 m_2}{m_1} - \frac{2x_1 m_2^2}{m_1^2} \right),$$

$$C_1 = \left(\frac{m_2^2 x_1^2}{m_1^2} - \frac{2y_1 m_2 x_1}{m_1} - r^2 + y_1^2 \right).$$

Из двух полученных корней квадратного уравнения выбираем меньший корень, т.к. вторая точка пересечения прямой с окружностью располагается левее точки (x_1, y_1) :

$$x_2 = \frac{-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}.$$

По найденному решению x_2 находим ординату второй точки пересечения отраженного луча с окружностью:

$$y_2 = \frac{(x_2 - x_1) \cdot m_1}{m_1} + y_1.$$

Отметим, что в случае двух и более отражений луча внутри капли, рассуждения проводятся аналогично. Определяются проекции вектора нормали к капле в точке пересечения падающего луча, вычисляется угол падения, записывается система для нахождения направляющего вектора отраженного луча, вычисляются координаты точки пересечения отраженного луча с окружностью.

3.4 Второе преломление луча

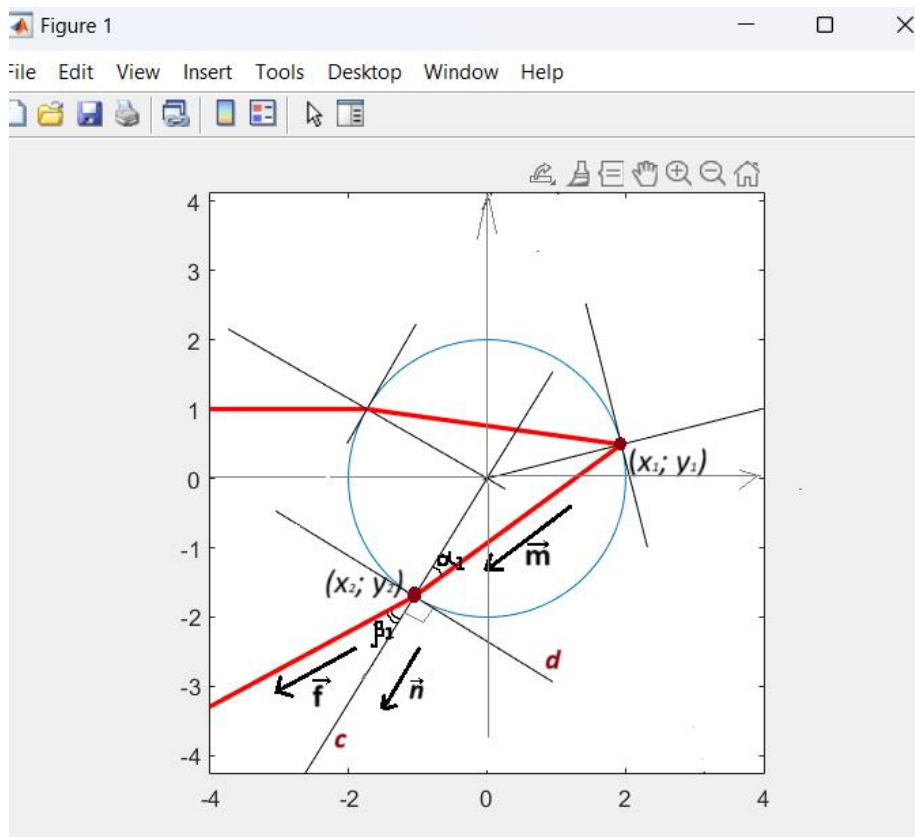


Рис. 15. Построение преломленного луча

В зависимости от знака ординаты y_2 координаты точки, в которой происходит преломление луча, будут иметь вид:

$$(x_2; y_2) = (x_2; \text{sign}(y_2)\sqrt{r^2 - x_2^2}).$$

Вычислим производную функции, задающей окружность:

$$f'(x) = \pm \frac{-2x_2}{2\sqrt{r^2 - x_2^2}} = \mp \frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_2^2}},$$

где знак (+) отвечает верхней половине окружности, а (-) – нижней.

Уравнение касательной d к окружности в точке преломления луча для случая касания верхней половины окружности или нижней половины:

$$d: y = \mp \frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_2^2}} \cdot x \pm \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_2^2}}.$$

Запишем это уравнение, используя функцию знака:

$$d: y = -\text{sign}(y_2) \cdot \frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_2^2}} \cdot x + \text{sign}(y_2) \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_2^2}}.$$

Представим уравнение прямой d (касательной) в общем виде:

$$\text{sign}(y_2) \cdot \frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_2^2}} \cdot x + y - \text{sign}(y_2) \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_2^2}} = 0.$$

Вектор нормали к этой прямой будет иметь координаты:

$$\vec{n} = \{n_5, n_6\} = \left\{ \text{sign}(y_2) \cdot \frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_2^2}}; 1 \right\}.$$

Уравнение нормали к прямой d (уравнение прямой c) в каноническом виде:

$$\frac{x - x_2}{n_5} = \frac{y - y_2}{n_6},$$

$$y = \frac{(x - x_2) \cdot n_6}{n_5} + y_2.$$

Вычислим угол между отраженным лучом и нормалью к окружности в точке преломления луча:

$$\cos(\widehat{\vec{m}; \vec{n}}) = \cos \alpha_2,$$

$$\cos(\widehat{\vec{m}; \vec{n}}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{m_1 \cdot n_5 + m_2 \cdot n_6}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \cdot \sqrt{n_5^2 + n_6^2}},$$

$$\alpha_2 = \arccos \left(\frac{m_1 \cdot n_5 + m_2 \cdot n_6}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \cdot \sqrt{n_5^2 + n_6^2}} \right).$$

Коэффициент преломления:

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = \frac{1}{N},$$

где $\sin \alpha_2$ - синус угла между отраженным лучом и нормалью, $\sin \beta_2$ – синус угла между преломленным лучом и нормалью.

Угол между преломленным лучом и нормалью равен:

$$\beta_2 = \arcsin(\sin \alpha_2 \cdot N).$$

Запишем скалярное произведение векторов \vec{n} и \vec{f} , где \vec{f} – направляющий вектор преломленного луча. Угол между данными векторами равен β_2 .

$$\vec{n} \cdot \vec{f} = |\vec{n}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos \beta_2,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{f} = n_5 \cdot f_1 + n_6 \cdot f_2.$$

Приравнявая правые части в записи скалярного произведения векторов \vec{n} и \vec{f} , получим уравнение:

$$n_5 \cdot f_1 + n_6 \cdot f_2 = |\vec{n}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos \beta_2.$$

Для однозначности определения неизвестных координат вектора \vec{f} добавим к полученному уравнению условие нормировки вектора \vec{f} :

$$\begin{cases} n_5 \cdot f_1 + n_6 \cdot f_2 = |\vec{n}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos \beta_2, \\ f_1^2 + f_2^2 = 1. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения неизвестную f_1 и подставим во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{|\vec{n}| \cdot \cos \beta_2 - n_6 \cdot f_2}{n_5}, \\ \left(\frac{|\vec{n}| \cdot \cos \beta_2 - n_6 \cdot f_2}{n_5} \right)^2 + f_2^2 = 1. \end{cases}$$

Решим второе уравнение относительно неизвестной f_2 :

$$\left(\frac{\sqrt{n_5^2 + n_6^2} \cdot \cos(\beta_1) - n_6 \cdot f_2}{n_5} \right)^2 + f_2^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\sqrt{n_5^2 + n_6^2} \cdot (\cos(\beta_1)) - f_2}{n_5} \right)^2 + f_2^2 = 1,$$

$$\frac{f_2^2 - 2\sqrt{n_5^2 + n_6^2} \cdot \cos(\beta_1) \cdot f_2 + (n_5^2 + n_6^2) \cdot \cos^2(\beta_1)}{n_5^2} + f_2^2 = 1,$$

$$f_2^2 - 2\sqrt{n_5^2 + n_6^2} \cdot \cos(\beta_1) \cdot f_2 + (n_5^2 + n_6^2) \cdot \cos^2(\beta_1) + n_5^2 \cdot f_2^2 - n_5^2 = 0.$$

Сгруппируем коэффициенты перед одинаковыми степенями f_2 :

$$(1 + n_5^2) \cdot f_2^2 - 2\sqrt{n_5^2 + n_6^2} \cdot \cos(\beta_1) \cdot f_2 + (n_5^2 + n_6^2) \cdot \cos^2(\beta_1) - n_5^2 = 0.$$

Полученное уравнение является квадратным относительно неизвестной f_2 .

Корни уравнения имеют следующий вид:

$$f_2 = \frac{\sqrt{n_5^2 + n_6^2} \cdot \cos \beta_2}{1 + n_5^2} \pm \frac{\pm \sqrt{(n_5^2 + n_6^2) \cdot \cos^2 \beta_2 - (1 + n_5^2) \cdot ((n_5^2 + n_6^2) \cdot \cos^2 \beta_2 - n_5^2)}}{1 + n_5^2}.$$

Знак корня определяется с учетом желаемого направления вектора \vec{f} . К примеру, на рис. 15 представлен ход луча света при переходе из водной среды в воздушную. Показанному на рис. 15 вектору \vec{f} соответствует корень, имеющий отрицательную проекцию на ось Oy . Поэтому при выборе знака нужно учитывать это ограничение ($f_2 < 0$).

По найденному f_2 определяется проекция вектора \vec{f} на ось Ox – неизвестная f_1 :

$$f_1 = \frac{\sqrt{n_5^2 + n_6^2} \cdot \cos(\beta_1) + n_6 \cdot f_2}{n_5}.$$

Запишем в каноническом виде уравнение прямой – преломленного луча.

$$\frac{x - x_2}{f_1} = \frac{y - y_2}{f_2}.$$

Уравнение преломленного луча в явном виде:

$$y = \frac{(x - x_2) \cdot f_2}{f_1} + y_2.$$

Глава 4. Исследование хода лучей для прямой и перевернутой радуги

4.1 Прямая радуга

Рассмотрим случай однократного отражения лучей внутри капли.

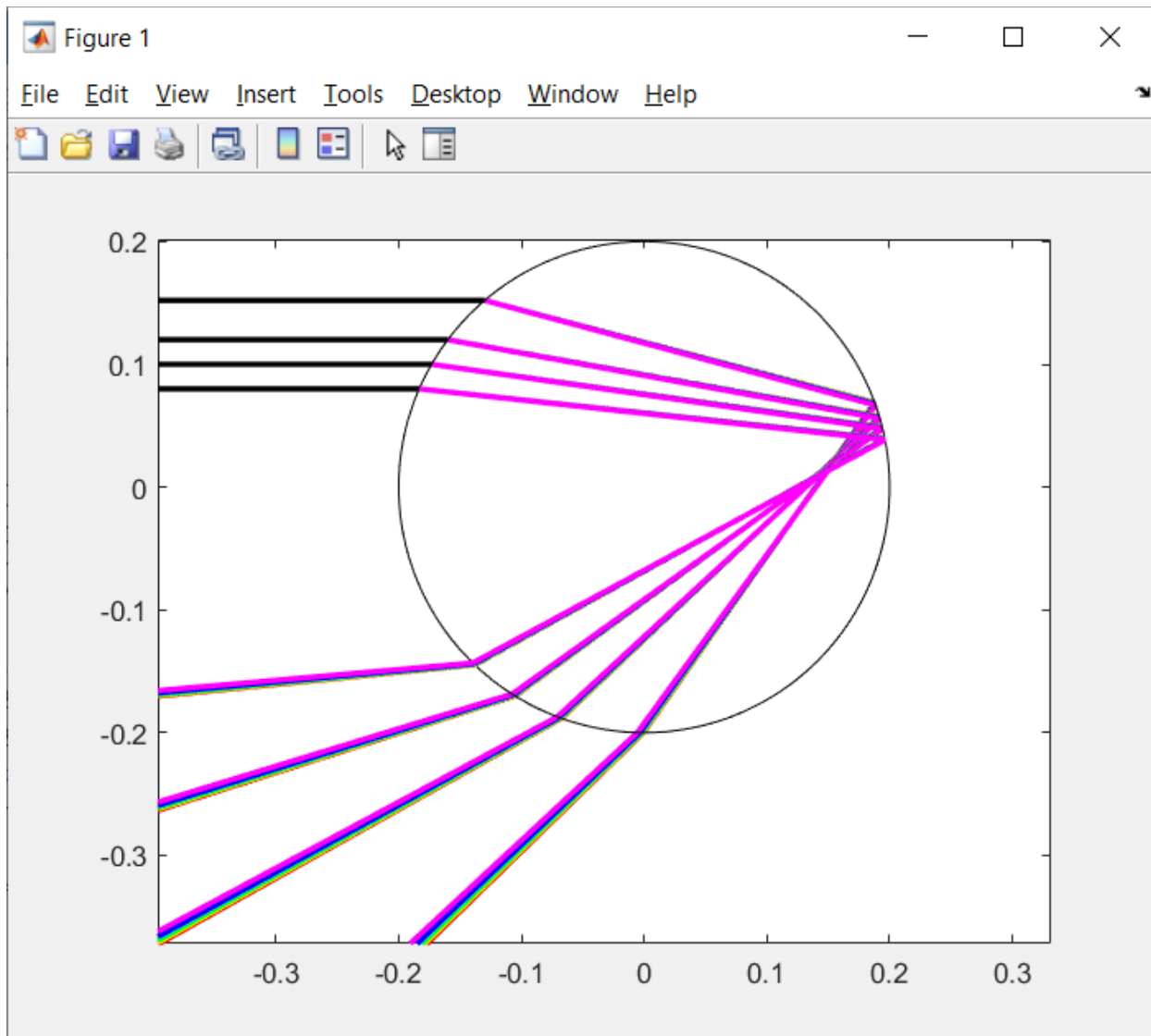


Рис. 16. Вид радуги в случае входящих лучей, расположенных выше центра капли

Пусть r – радиус профиля капли, a – ордината входящего в каплю светового луча.

На рис. 16 представлено поведение спектра для случаев, когда точки выхода лучей из капли имеют отрицательную абсциссу, т.е. расположены с наблюдателем по одну сторону от капли. Из табл. 3 видно, что при увеличении параметра a от 0 до $0.76 \cdot r$ угол между входящим и выходящим лучами увеличивается от нуля до 40° . Значение угла, равное нулю соответствует лучу, проходящему через центр

капли (вырожденный случай). Значение угла порядка $38,95^\circ - 40,34^\circ$ отвечает лучам, выходящим из нижней точки капли.

Табл. 3. Углы между входящим и выходящим лучами спектра в случае входящих лучей, расположенных выше центра капли

a	γ — угол между входящим и выходящим лучами в градусах						
$0.4 \cdot r$	22.7950	22.7300	22.6921	22.6110	22.4710	22.4227	22.1661
$0.5 \cdot r$	28.2528	28.1692	28.1204	28.0162	27.8361	27.7740	27.4440
$0.6 \cdot r$	33.4287	33.3245	33.2638	33.1340	32.9097	32.8323	32.4215
$0.76 \cdot r$	40.3394	40.1958	40.1123	39.9335	39.6249	39.5184	38.9535

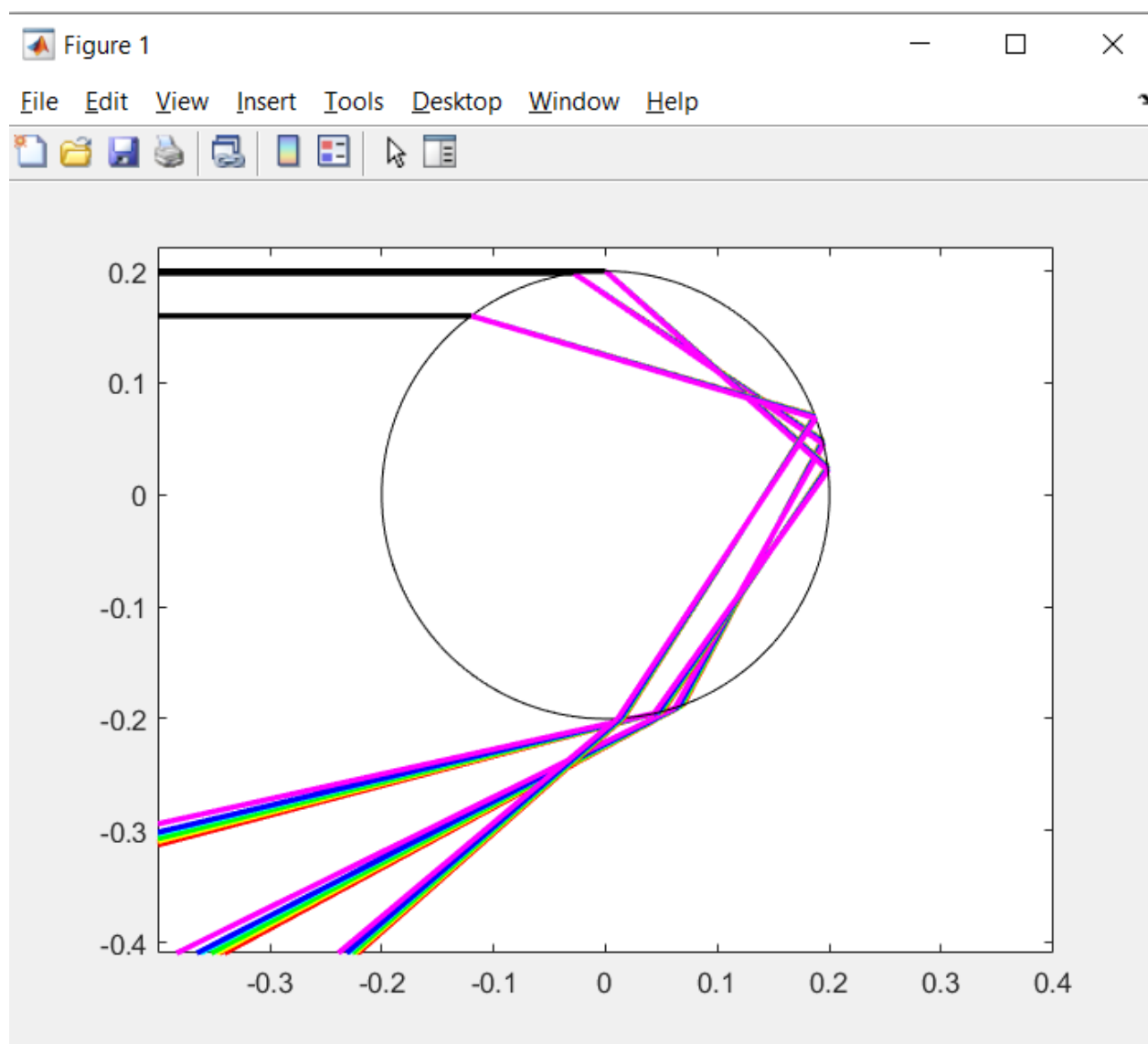


Рис. 17. Вид радуги в случае входящих лучей, расположенных вблизи верхней точки капли

На рис. 17 представлен случай, при котором точки выхода лучей из капли имеют положительную абсциссу, т.е. расположены с другой стороны от капли,

нежели наблюдатель. При увеличении параметра a от $0.76*r$ до $0.85*r$ угол γ между входящим и выходящим лучами увеличивается до значения порядка 42° , а при дальнейшем увеличении a до значения $0.99999999*r$ (при приближении луча к верхней горизонтальной касательной профиля капли) – убывает (табл. 4).

Табл. 4. Углы между входящим и выходящим лучами спектра
в случае входящих лучей, расположенных вблизи верхней точки капли

a	γ — угол между входящим и выходящим лучами в градусах						
$0.8*r$	41.5079	41.3527	41.2624	41.0692	40.7356	40.6205	40.0100
$0.85*r$	42.3176	42.1464	42.0467	41.8335	41.4656	41.3387	40.6656
$0.9*r$	41.8525	41.6631	41.5529	41.3172	40.9105	40.7702	40.0266
$0.99*r$	28.4252	28.1956	28.0620	27.7765	27.2841	27.1143	26.2152
$0.99999999*r$	14.8141	14.5794	14.4425	14.1506	13.6470	13.4733	12.5540

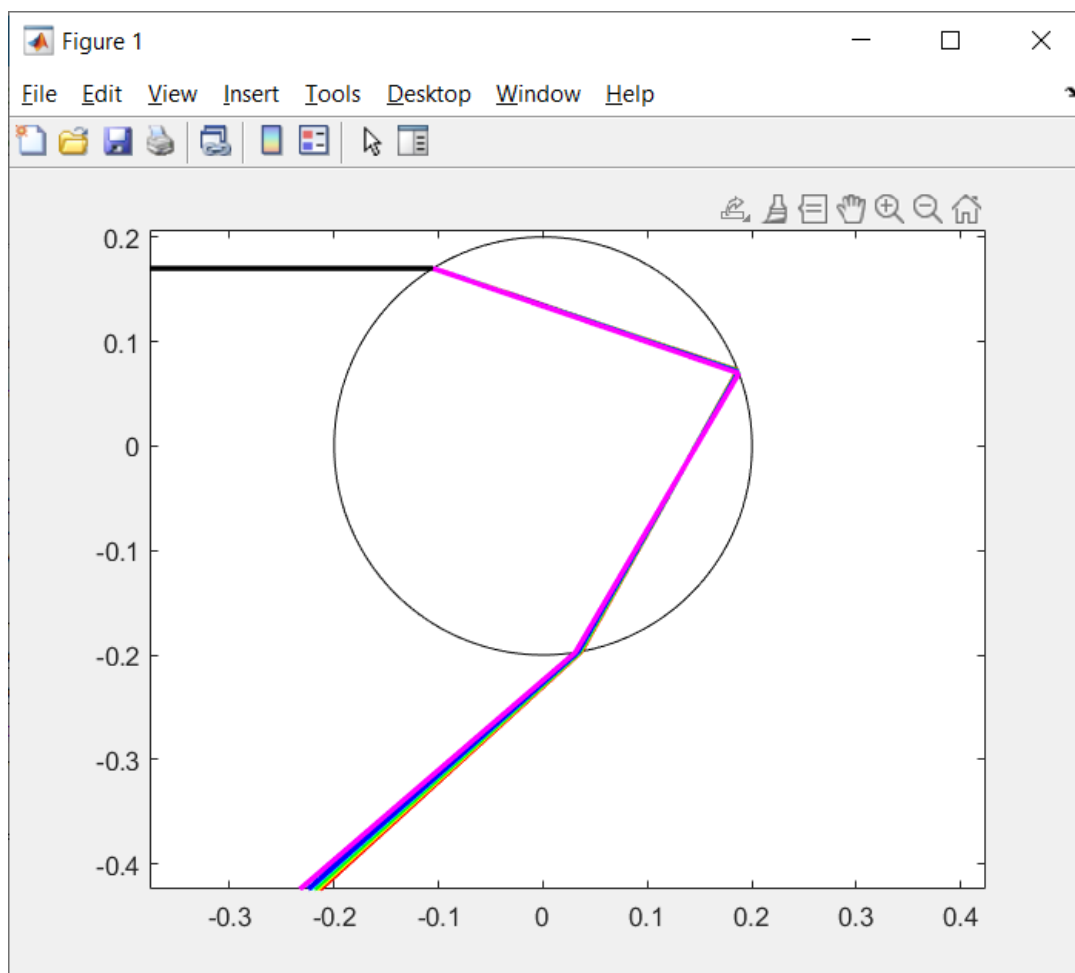


Рис. 18. Вид радуги, наблюдаемой в природе

Случай, когда угол γ достигает максимума, отвечает наблюдаемому в природе явлению и представляет интерес с точки зрения объяснения возникновения радуги (рис. 18).

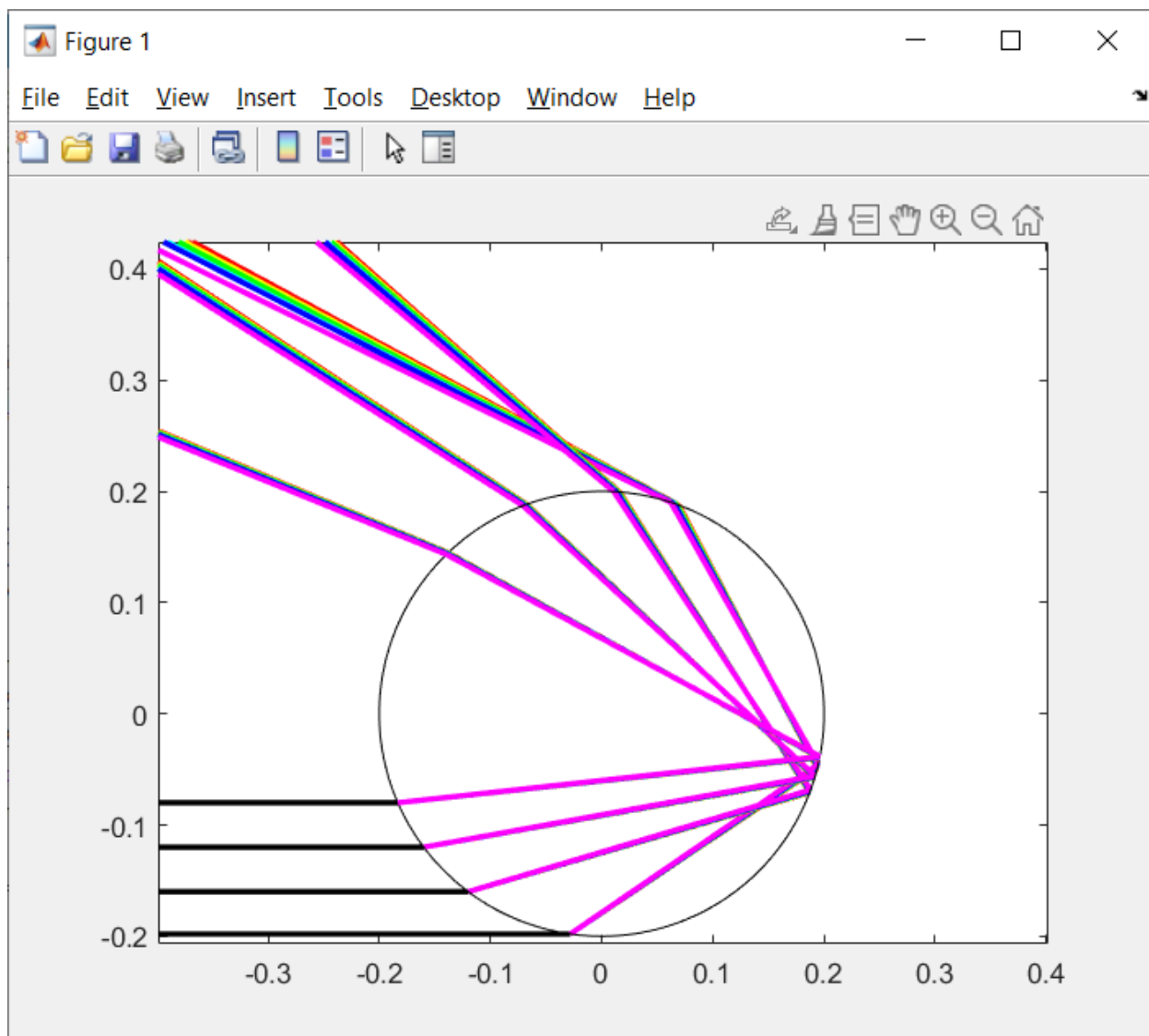


Рис. 19. Вид радуги в случае входящих лучей, расположенных ниже центра капли

На рис. 19 представлен ход лучей спектра при входящих световых лучах, расположенных в отрицательной полуплоскости. Видно, что выходящие из капли лучи уходят выше источника и не попадают в поле зрения наблюдателя. Поэтому данный случай с точки зрения объяснения радуги нас не интересует.

Отметим, что **прямой порядок лучей, наблюдаемых человеком, получается параллельным переносом выходящих из капли лучей, представленных на рис. 18, в точку обзора наблюдателя.** Таким образом, **верхний луч для наблюдателя будет иметь красный цвет (угол наклона наибольший - 42.3176), а нижний – фиолетовый (угол наклона наименьший - 40.6656).**

4.2 Перевернутая радуга

Аналогично п. 4.1 проведем исследование хода лучей при двукратном отражении внутри капли.

Рассмотрим поток лучей, входящих в каплю ниже ее геометрического центра. В этом случае параметр $a < 0$. При уменьшении параметра a от нуля до $-0.6 \cdot r$ выходящие лучи имеют отрицательный коэффициент наклона и не попадают в поле зрения наблюдателя (рис. 20). При этом угол между входящим и выходящим лучами уменьшается от нуля до $\sim 90^\circ$ (табл. 5).

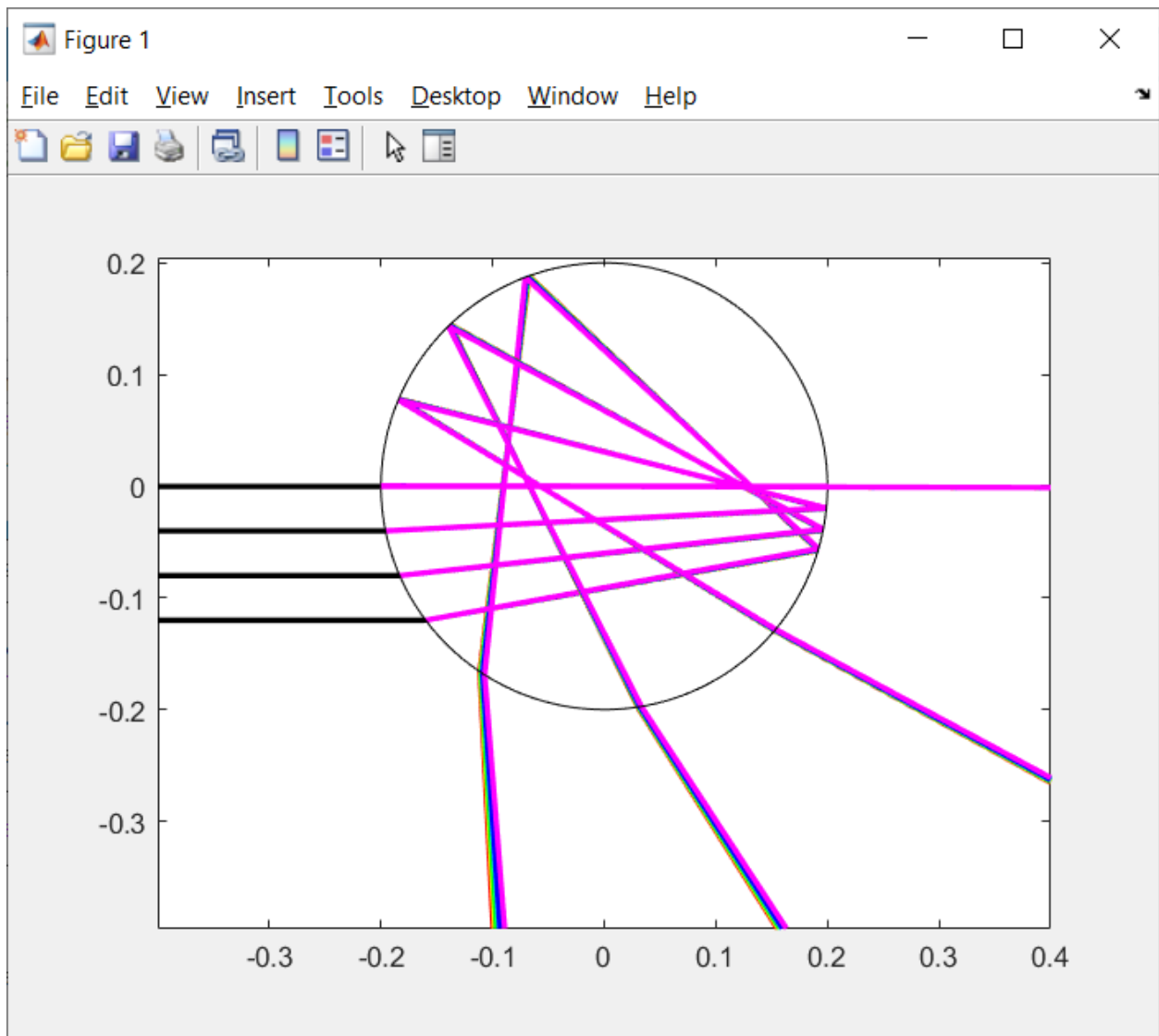


Рис. 20. Вид радуги в случае входящих лучей, расположенных ниже центра капли, не попадающей в поле зрения наблюдателя

Табл. 5. Углы между входящим и выходящим лучами спектра
в случае входящих лучей, расположенных ниже центра капли

a	γ — угол между входящим и выходящим лучами в градусах						
$-0.001*r$	179.856	179.857	179.857	179.857	179.858	179.8577	179.859
$-0.2*r$	151.225	151.272	151.299	151.358	151.459	151.4943	151.680
$-0.4*r$	122.229	122.327	122.384	122.505	122.715	122.7877	123.173
$-0.6*r$	92.987	93.143	93.234	93.429	93.766	93.882	94.498

Дальнейшее уменьшение параметра a до $-0.95*r$ порождает выходящие лучи с положительным угловым коэффициентом (рис. 21). При этом угол γ уменьшается и достигает своего минимума порядка $50^\circ - 53^\circ$. Изменение параметра a с $-0.95*r$ до $-0.99999999*r$ (крайнее нижнее положение) приводит к росту углу (рис. 22, табл. 6).

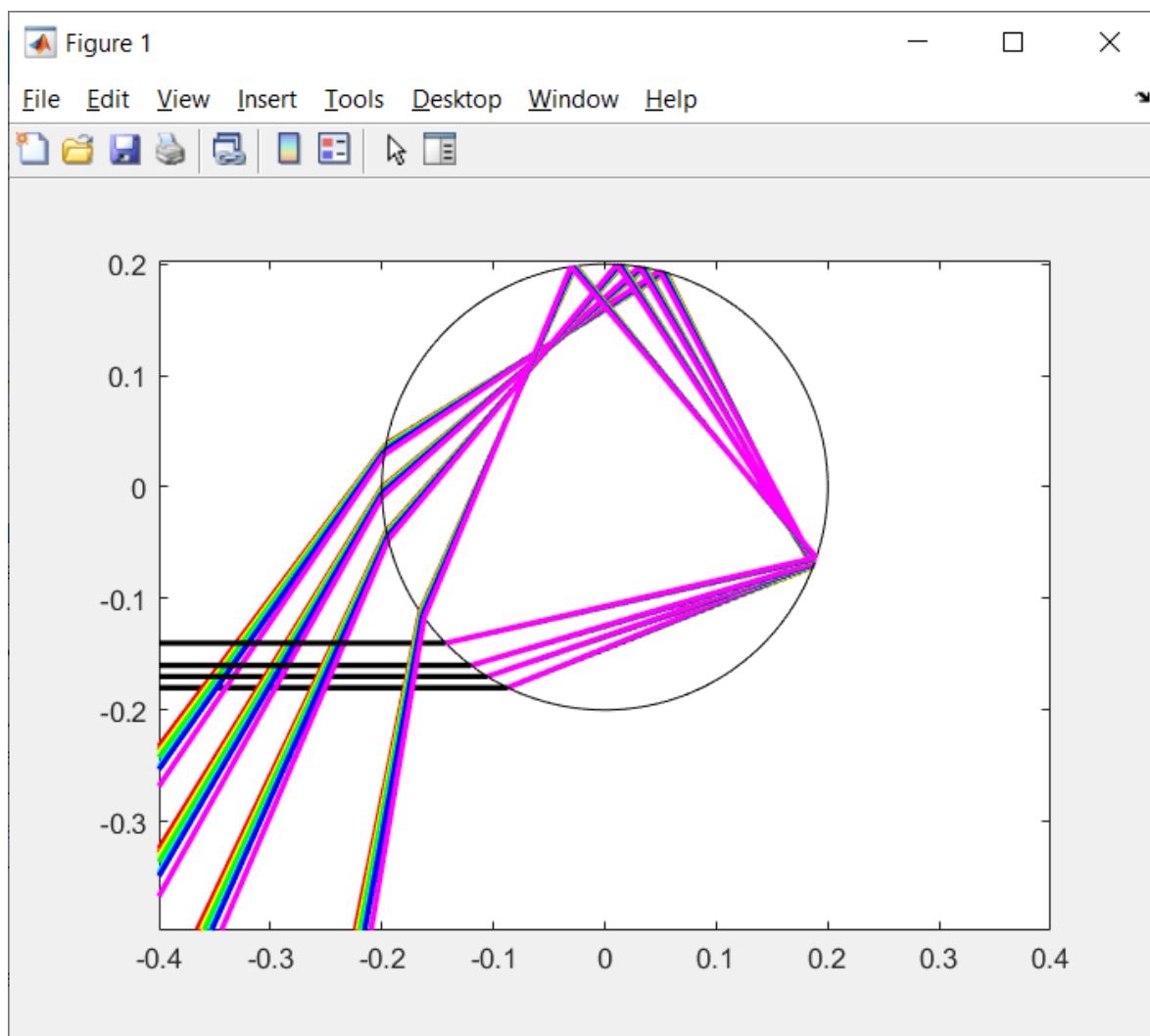


Рис. 21. Вид радуги в случае входящих лучей, расположенных ниже центра капли,
попадающей в поле зрения наблюдателя

Табл. 6. Углы между входящим и выходящим лучами спектра в случае входящих лучей, расположенных ниже центра капли, вблизи ее нижней точки

a	γ — угол между входящим и выходящим лучами в градусах						
$-0.7*r$	78.4886	78.6801	78.7915	79.0299	79.4416	79.5837	80.3375
$-0.8*r$	64.6080	64.8408	64.9763	65.2662	65.7666	65.9392	66.8549
$-0.85*r$	58.3119	58.5687	58.7183	59.0380	59.5900	59.7804	60.7900
$-0.9*r$	53.0632	53.3472	53.5126	53.8661	54.4762	54.6866	55.8020
$-0.95*r$	50.3919	50.7073	50.8908	51.2832	51.9601	52.1935	53.4303
$-0.99*r$	55.4719	55.8162	56.0166	56.4448	57.1835	57.4381	58.7868
$-0.999*r$	63.0689	63.4204	63.6249	64.0620	64.8158	65.0756	66.4518
$-0.99999999*r$	67.7869	68.1390	68.3443	68.7821	69.5376	69.7981	71.1772

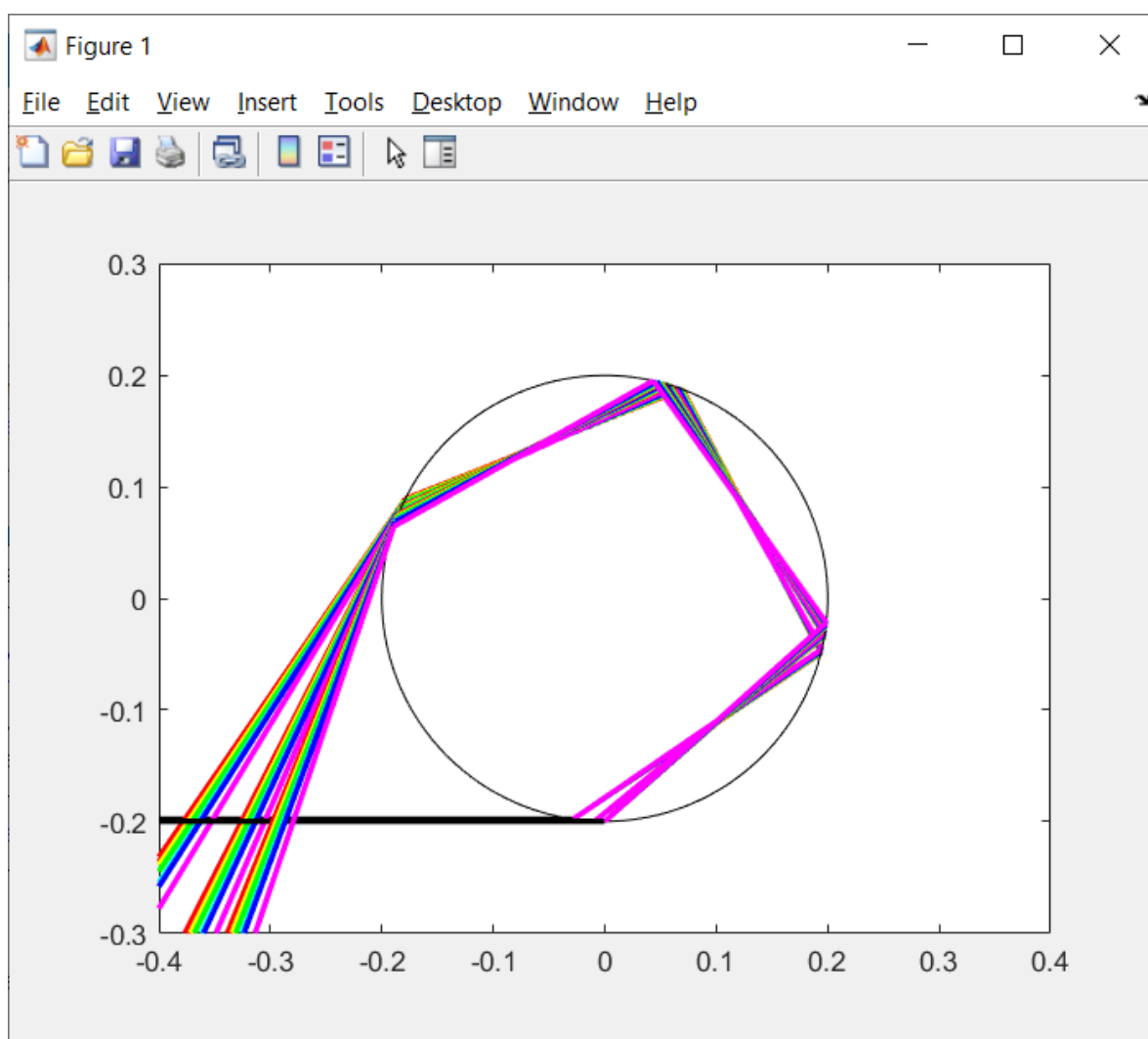


Рис. 22. Вид радуги в случае входящих лучей, расположенных вблизи нижней точки капли

Угол наклона наблюдаемой в природе перевернутой радуги составляет порядка $51^\circ - 52^\circ$, что соответствует найденному минимальному углу между

входящим и выходящим лучами света. На *рис. 23* изображен ход лучей при минимальном угле наклона, полученном в работе.

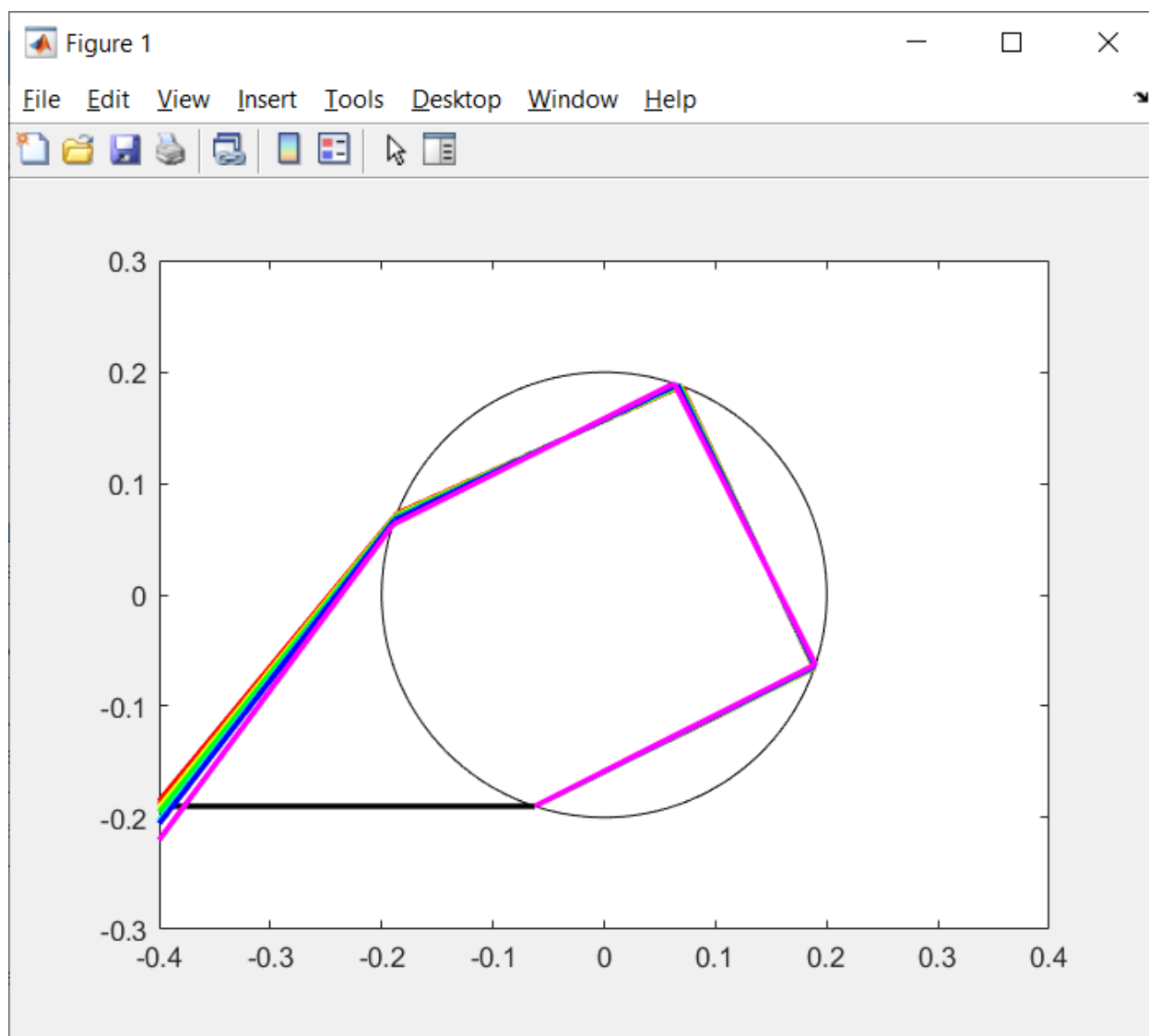


Рис. 23. Вид радуги, наблюдаемой в природе

При потоке лучей, проходящем над геометрическим центром капли, выходящие лучи не попадают в область зрения наблюдателя (*рис. 24*), поэтому данный случай нас интересоваться не будет.

Аналогично п. 4.1 отметим, что *обратный порядок лучей, наблюдаемых человеком, получается параллельным переносом выходящих из капли лучей, представленных на рис. 23, в точку обзора наблюдателя*. Таким образом, *верхний луч для наблюдателя будет иметь фиолетовый цвет (угол наклона наибольший - 53.4303), а нижний – красный (угол наклона наименьший - 50.3919).*

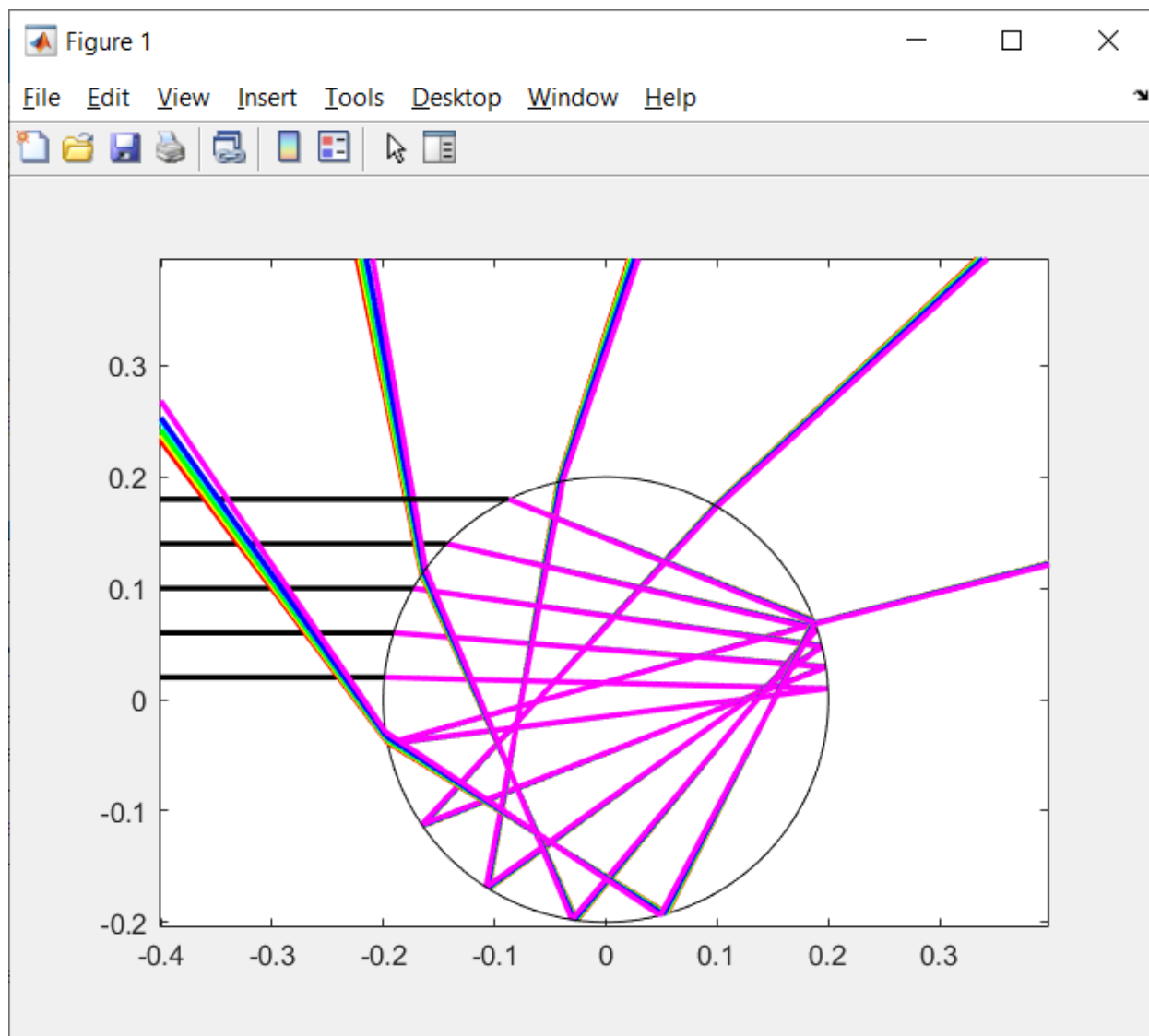


Рис. 24. Вид радуги в случае входящих лучей, расположенных выше центра капли

Табл. 7. Углы между входящим и выходящим лучами спектра в случае входящих лучей, расположенных выше центра капли

a	γ — угол между входящим и выходящим лучами в градусах						
$0.1 \cdot r$	14.3724	14.3490	14.3355	14.3064	14.2562	14.2388	14.1467
$0.3 \cdot r$	43.2353	43.1636	43.1219	43.0327	42.8784	42.8252	42.5425
$0.5 \cdot r$	72.3792	72.2537	72.1807	72.0243	71.7542	71.6610	71.1660
$0.7 \cdot r$	101.5114	101.3199	101.2085	100.9701	100.5584	100.4163	99.6625
$0.9 \cdot r$	126.9368	126.6528	126.4874	126.1339	125.5238	125.3134	124.1980

Глава 5. Компьютерная реализация

5.1 Однократное отражение луча внутри капли

```
clearall
r=input('Введите радиус окружности: ');
theta=linspace(0,2*pi,200);
x=r*cos(theta);
y=r*sin(theta);
plot(x,y, '-k'); %Построение окружности
holdon

a=0.5*r; %Ввод параметра

plot([-2*r,-sqrt(r*r-a*a)], [a,a], '-k', 'LineWidth',2) %Задание
прямой – луча света, входящего в каплюводы
axis([-2*r 2*r -1.5*r 1.5*r])
axis('equal');

color_array=['r' 'r' 'y' 'g' 'c' 'b' 'm']; %Вводмассива (цвета)
n_array=[1.3311 1.3323 1.3330 1.3345 1.3371 1.3380 1.3428]; %
Ввод массива (коэффициенты преломления для каждого цвета луча)

forj=1:1:7 % Цикл по лучам видимого спектра

% Координаты точки пересечения входящего в каплю луча с левой
границей капли
x0=-sqrt(r*r-a*a);
y0=a;
delta=r;

% Проекция вектора нормали к окружности в точке входа луча
```

```

n1=sqrt(r*r-a*a)/a;
n2=-1;
% Проекция направляющего вектора входящего луча
p1=1;
p2=0;
% Угол между нормалью и входящим лучом
alfa=acos((p1*n1+p2*n2)/sqrt((p1*p1+p2*p2)*(n1*n1+n2*n2)));
% Коэффициент преломления луча при переходе из воздушной среды в
водную для выбранного луча спектра
N=n_array(j);
% Угол между нормалью и преломленным лучом
betta=asin(sin(alfa)/N);
% Проекция направляющего вектора преломленного луча
q2=(2*sqrt(n1*n1+n2*n2)*cos(betta)-
sqrt(4*(n1*n1+n2*n2)*cos(betta)*cos(betta)+(-4-
4*n1*n1)*((n1*n1+n2*n2)*cos(betta)*cos(betta)-
n1*n1)))/(2+2*n1*n1);
q1=(sqrt(n1*n1+n2*n2)*(-cos(betta))-q2*n2)/n1;
% Коэффициенты общего уравнения прямой, соответствующей
преломленному лучу
A=1+q2*q2/(q1*q1);
B=(-2*x0*q2*q2)/(q1*q1)+2*q2*y0/q1;
C=x0*x0*q2*q2/(q1*q1)+(-x0*2*q2*y0)/q1+y0*y0-r*r;
% Координаты точки пересечения преломленного луча с каплей
x1=(-B+sqrt(B*B-4*A*C))/(2*A);
y1=(x1-x0)*q2/q1+y0;
% Построение преломленного луча внутри капли
plot([x0,x1],[y0,y1],color_array(:,j) , 'LineWidth',2);

```

```

% Проекция вектора нормали к окружности в точке ее пересечения с
% преломленным лучом
n3=sign(y1)*x1/sqrt(r*r-x1*x1);
n4=1;
% Угол падения преломленного луча (угол между преломленным лучом
и нормалью к капле в точке отражения)
gamma=acos((q1*n3+q2*n4)/(sqrt(q1*q1+q2*q2)*sqrt(n3*n3+n4*n4)));
% Проекция направляющего вектора отраженного луча
m2=(2*sqrt(n3*n3+n4*n4)*(cos(gamma))-
sqrt(4*(n3*n3+n4*n4)*cos(gamma)*cos(gamma)+(-4-
4*n3*n3)*((n3*n3+n4*n4)*cos(gamma)*cos(gamma)-
n3*n3)))/(2+2*n3*n3);
m1=(sqrt(n3*n3+n4*n4)*(cos(gamma))-m2*n4)/n3;
% Коэффициенты квадратного уравнения для определения абсциссы
точки пересечения отраженного луча с окружностью
A1=1+m2*m2/(m1*m1);
B1=(-2*x1*m2*m2)/(m1*m1)+2*m2*y1/m1;
C1=x1*x1*m2*m2/(m1*m1)+(-x1*2*m2*y1)/m1+y1*y1-r*r;
% Координаты точки пересечения отраженного луча с окружностью
x2=(-B1-sqrt(B1*B1-4*A1*C1))/(2*A1);
y2=(x2-x1)*m2/m1+y1;
% Построение отраженного луча внутри капли
plot([x2,x1],[y2,y1], color_array(:,j), 'LineWidth',2);
% Проекция вектора нормали к окружности в точке выхода из капли
отраженного луча
n5=sign(y2)*x2/sqrt(r*r-x2*x2)
n6=1;
% Угол падения отраженного луча на границу капли
alfa1=acos((m1*n5+m2*n6)/(sqrt((m1*m1+m2*m2)*(n5*n5+n6*n6))))

```

```

% Угол между нормалью к окружности в точке выхода из капли луча
и преломленным лучом.
betta1=asin(N*sin(alfa1))
% Проекция направляющего вектора выходящего из капли луча
if x2<0
    p2=(2*sqrt(n5*n5+n6*n6)*cos(betta1)-
sqrt(4*(n5*n5+n6*n6)*cos(betta1)*cos(betta1)+(-4-
4*n5*n5)*((n5*n5+n6*n6)*cos(betta1)*cos(betta1)-
n5*n5)))/(2+2*n5*n5)
    p1=(sqrt(n5*n5+n6*n6)*(cos(betta1))-p2*n6)/n5
else
    p2=(2*sqrt(n5*n5+n6*n6)*cos(pi-betta1)-
sqrt(4*(n5*n5+n6*n6)*cos(pi-betta1)*cos(pi-betta1)+(-4-
4*n5*n5)*((n5*n5+n6*n6)*cos(pi-betta1)*cos(pi-betta1)-
n5*n5)))/(2+2*n5*n5)
    p1=(sqrt(n5*n5+n6*n6)*(cos(pi-betta1))-p2*n6)/n5
end;
% Построение выходящего из капли луча
plot([-2*r,x2],[(-2*r-x2)*(p2/p1)+y2,y2],
color_array(:,j),'LineWidth',2);
% Запись в массив угла между входящим в каплю и выходящим из нее
лучами для каждого луча видимого спектра
alfares(j)=atan(p2/p1)*180/pi
end;

alfares % Вывод результата (углы между входящим и выходящими
лучами)

```

5.2 Двукратное отражение внутри капли

```
clearall
r=input ('Введите радиус окружности: ');
theta=linspace(0,2*pi,200);
x=r*cos(theta);
y=r*sin(theta);
plot(x,y,'-k'); %Построение окружности
holdon

a=-r*0.5 %Определение параметра a
param=a/r

plot([-2*r,-sqrt(r*r-a*a)],[a,a],'-k','LineWidth',2)
% Задание прямой – луча света, входящего в каплю воды
axis('equal');
axis([-2*r 2*r -1.5*r 1.5*r])

color_array=['r' 'r' 'y' 'g' 'c' 'b' 'm']; %Ввод массива (цвета)
n_array=[1.3311 1.3323 1.3330 1.3345 1.3371 1.3380 1.3428];
% Ввод массива (коэффициенты преломления для каждого цвета луча)

forj=1:1:7 % Цикл по лучам видимого спектра
%Координаты точки пересечения входящего луча и окружности
x0=-sqrt(r*r-a*a);
y0=a;
delta=r;
%Проекция вектора нормали к окружности в точке входа луча
n1=sqrt(r*r-a*a)/a;
n2=-1;
% Проекция направляющего вектора входящего луча
```

```

p1=1;
p2=0;
% Угол между нормалью и входящим лучом
alfa=acos((p1*n1+p2*n2)/sqrt((p1*p1+p2*p2)*(n1*n1+n2*n2)));
% Коэффициент преломления луча при переходе из воздушной среды в
водную для выбранного луча спектра
N=n_array(j);
% Угол между нормалью и преломленным лучом
betta=asin(sin(alfa)/N);
% Проекции направляющего вектора преломленного луча
q2=(2*sqrt(n1*n1+n2*n2)*cos(betta)-
sqrt(4*(n1*n1+n2*n2)*cos(betta)*cos(betta)+(-4-
4*n1*n1)*((n1*n1+n2*n2)*cos(betta)*cos(betta)-
n1*n1)))/(2+2*n1*n1);
q1=(sqrt(n1*n1+n2*n2)*(-cos(betta))-q2*n2)/n1;
% Коэффициенты общего уравнения прямой, соответствующей
преломленному лучу
A=1+(q2*q2)/(q1*q1);
B=(-2*x0*q2*q2)/(q1*q1)+2*q2*y0/q1;
C=x0*x0*q2*q2/(q1*q1)+(-x0*2*q2*y0)/q1+y0*y0-r*r;
% Координаты точки пересечения преломленного луча с каплей
x1=(-B+sqrt(B*B-4*A*C))/(2*A);
if abs(x1-x0)<0.01
    x1=(-B-sqrt(B*B-4*A*C))/(2*A);
end;
y1=(x1-x0)*q2/q1+y0;
% Построение преломленного луча внутри капли
plot([x0,x1],[y0,y1],color_array(:,j),'LineWidth',2);
% Проекции вектора нормали к окружности в точке ее пересечения с
преломленным лучом

```

```

n3=sign(y1)*x1/sqrt(r*r-x1*x1);
n4=1;
% Угол падения преломленного луча (угол между преломленным лучом
и нормалью к капле в точке первого отражения)
gamma=acos((q1*n3+q2*n4)/(sqrt(q1*q1+q2*q2)*sqrt(n3*n3+n4*n4)));
% Проекция направляющего вектора отраженного луча
m2=(2*sqrt(n3*n3+n4*n4)*(cos(gamma))-
sqrt(4*(n3*n3+n4*n4)*cos(gamma)*cos(gamma)+(-4-
4*n3*n3)*((n3*n3+n4*n4)*cos(gamma)*cos(gamma)-
n3*n3)))/(2+2*n3*n3);
m1=(sqrt(n3*n3+n4*n4)*(cos(gamma))-n4*m2)/n3;
% Коэффициенты квадратного уравнения для определения абсциссы
точки пересечения отраженного луча с окружностью
A1=1+m2*m2/(m1*m1);
B1=(-2*x1*m2*m2)/(m1*m1)+2*m2*y1/m1;
C1=x1*x1*m2*m2/(m1*m1)+(-x1*2*m2*y1)/m1+y1*y1-r*r;
% Координаты точки пересечения отраженного луча с окружностью
x2=(-B1+sqrt(B1*B1-4*A1*C1))/(2*A1);
if abs(x2-x1)<0.01
    x2=(-B1-sqrt(B1*B1-4*A1*C1))/(2*A1);
end;
y2=(x2-x1)*m2/m1+y1;
% Построение отраженного луча внутри капли
plot([x2,x1],[y2,y1],color_array(:,j),'LineWidth',2);
% Проекция вектора нормали к окружности в точке второго
отражения луча
n5=sign(y2)*x2/sqrt(r*r-x2*x2);
n6=1;
% Угол падения отраженного луча на границу капли
alfa1=acos((m1*n5+m2*n6)/(sqrt((m1*m1+m2*m2)*(n5*n5+n6*n6))));

```

```

if x2>0
    alfa1=pi-alfa1;
end;
% Проекция направляющего вектора луча после второго отражения
f2=(2*sqrt(n5*n5+n6*n6)*(cos(alfa1))-
sqrt(4*(n5*n5+n6*n6)*cos(alfa1)*cos(alfa1)+(-4-
4*n5*n5)*((n5*n5+n6*n6)*cos(alfa1)*cos(alfa1)-
n5*n5)))/(2+2*n5*n5);
f1=(sqrt(n5*n5+n6*n6)*(cos(alfa1))-f2*n6)/n5;
% Коэффициенты квадратного уравнения для определения абсциссы
точки пересечения отраженного луча с окружностью
A2=1+f2*f2/(f1*f1);
B2=(-2*x2*f2*f2)/(f1*f1)+2*f2*y2/f1;
C2=x2*x2*f2*f2/(f1*f1)+(-x2*2*f2*y2)/f1+y2*y2-r*r;
% Координаты точки пересечения отраженного луча с окружностью
x3=(-B2-sqrt(B2*B2-4*A2*C2))/(2*A2);
if abs(x3-x2)<0.01
    x3=(-B2+sqrt(B2*B2-4*A2*C2))/(2*A2);
end;
y3=(x3-x2)*f2/f1+y2;
% Построение отраженного луча внутри капли
plot([x3,x2],[y3,y2],color_array(:,j),'LineWidth',2);
% Проекция вектора нормали к окружности в точке выхода из капли
отраженного луча
n7=sign(y3)*x3/sqrt(r*r-x3*x3);
n8=1;
% Угол падения отраженного луча на границу капли
alfa2=acos((f1*n7+f2*n8)/(sqrt((f1*f1+f2*f2)*(n7*n7+n8*n8))));
% Угол между нормалью к окружности в точке выхода из капли луча
и преломленным лучом.

```



```

betta2=asin(N*sin(alfa2));
if a<0 & y3*x3>0 | a>0 & x3*y3<0
    betta2=pi-betta2;
end;
% Проекция направляющего вектора выходящего из капли луча
t2=(2*sqrt(n7*n7+n8*n8)*cos(betta2)-
sqrt(4*(n7*n7+n8*n8)*cos(betta2)*cos(betta2)+(-4-
4*n7*n7)*((n7*n7+n8*n8)*cos(betta2)*cos(betta2)-
n7*n7)))/(2+2*n7*n7);
t1=(sqrt(n7*n7+n8*n8)*(cos(betta2))-t2*n8)/n7;
% Построение выходящего из капли луча
ift2/t1>0 &a<0 | a>0 &t2/t1<0
plot([-2*r,x3],[(2*r-
x3)*t2/t1+y3,y3],color_array(:,j),'LineWidth',2);
else
    plot([2*r,x3],[(2*r-
x3)*t2/t1+y3,y3],color_array(:,j),'LineWidth',2);
end;
% Запись в массив угла между входящим в каплю и выходящим из нее
лучами для каждого луча видимого спектра
if atan(t2/t1)<0
    alphares(j)=(pi+atan(t2/t1))*180/pi;
else
    alphares(j)=atan(t2/t1)*180/pi;
end;
end;
Alphares %Вывод результата (углы между входящим и преломленными
лучами)

```

Заключение

В работе проведено моделирование прямой и перевернутой радуги при прохождении луча света через сферическую каплю. Рассмотрен механизм образования радуги с точки зрения математики. Использованные в работе основы аналитической геометрии (уравнения прямой на плоскости, в частности общее уравнение прямой, уравнение прямой в каноническом виде и др.), математического анализа (знания о производной функции, уравнение касательной к графику функции в точке) и алгебры (методы решения уравнений и систем) позволили построить картину прохождения лучей света.

Проведено исследование хода лучей видимого спектра при одном (и двух отражениях) внутри капли и двукратном преломлении в зависимости от положения источника света.

Дано объяснение наблюдаемых в природе углов наклона прямой и обратной радуги.

Разработана программа в среде MatLab, визуализирующая ход лучей видимого спектра при различных положениях входящего светового луча.

В ходе исследовательской работы мы решили поставленные задачи.

Дальнейшее развитие работы может быть связано с исследованием интенсивности световых лучей при преломлении и многократных отражениях внутри капель жидкости. Также возможно построение более сложной трехмерной модели хода лучей, позволяющей продемонстрировать целостную картину явления радуги.

Список используемой литературы

1. Авершина Г.Г., Изучение дисперсии света в веществе: методические указания к лабораторной работе № 68 / Г.Г. Авершина, А.В. Беляков, О.П. Шустрова. — СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2014. — 18 с
2. Беспалова И.М., Мартынчик К.И., Марковец А.В., Усов А.Г., Системы компьютерной математики: приемы работы в среде MATLAB: учеб. пособие /. — СПб.: ФГБОУВО «СПбГУПТД», 2019. — 107 с.
3. Гоголева Е.М., Прикладная оптика: учебное пособие / Е.М. Гоголева, Е.П. Фарафонтова.— Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016.— 184 с
4. Кузнецов А.А., Учебное пособие "Физика природной среды" / Кузнецов А.А.; Гос. ком. Рос. Федерации по высш. образованию, Моск. гос. ун-т геодезии и картографии. - М.: МосГУГиК, 1997. – 116 с.
5. Лазарев Юрий Федорович Л17 Начала программирования в среде MatLAB: Учебное пособие. - К.: НТУУ "КПИ", 2003. - 424 с.
6. Меленцова Ю.А., Основы высшей математики: курс лекций: [учеб.-метод. пособие] / Ю. А. Меленцова; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 88 с.
7. Меньшова И.В., МГТУ им. Н.Э. Баумана Кафедра «Высшая математика», 2020.
8. Нагаев Е.А., Почему мы видим радугу / Е. А. Нагаев, М. А. Набиева. // Юный ученый. 2021. №10(51). — С. 43-49.
9. Регеда В.В., Регеда О.Н., Язык программирования MATLAB: метод. указания к лабораторным работам – Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. – 92 с.
10. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Аналитическая геометрия для школьников: учебное пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: МЦНМО, 2022. – 200 с.

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

Шифр

MA-4

Предмет математика

ФИО участника (полностью) Разина Вера
Александровна

Дата рождения (дд.мм.гггг) 20.06.2007

Город Н. Новгород Область Нижегородская

Образовательное учреждение МАОУ "Лицей N 38"

Класс 11

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

Шифр

Ма-4

Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5	Итоговый балл	Подписи членов комиссии
20	10	0	0	15	45	<i>[Signature]</i>

Задача №3

x (км/ч) = скорость баржи 4 км/ч - $v_{\text{катер+баржа}}$ обратно

$t_1 = \frac{3}{x}$ время до отправления катера

$(x+9)$ км/ч - скорость катера (собственная) ?! нет!

$x + (x+9) = 2x+9$ (км/ч) $v_{\text{катера}}$ по течению
Катер догнал баржу \Rightarrow расстояния равны

$$3 + x \cdot t_2 = (9 + 2x) t_2$$

$$9t_2 + xt_2 - 3 = 0$$

$$t_2 = \frac{3}{x^2 + 108}$$

$$t_3 = \frac{3 + x(x^2 + 108)}{4} = \frac{3 + x^3 + 108x}{4}$$

Отсюда это?

0 баинько

$$a) t_{\text{общ}} = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2 + 108} + \frac{3 + x^3 + 108x}{4} =$$

$$= \frac{12 + 4x^3 + 432x + 3x + x^4 + 108x^2}{4x} = \frac{x^4 + 4x^3 + 108x^2 + 435x + 12}{4x} \quad (2)$$

$$b) f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 108x^2 + 435x + 12}{4x}$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x + 27 - 3x^{-2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) \text{ возр.}$$

$$3x^4 + 8x^3 + 108x^2 - 12 = 0$$

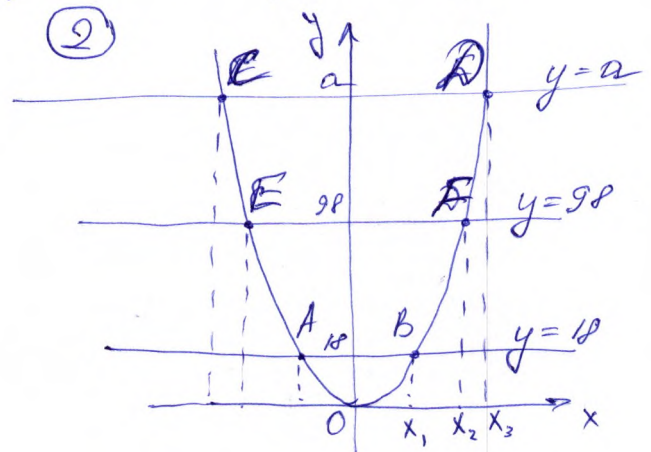
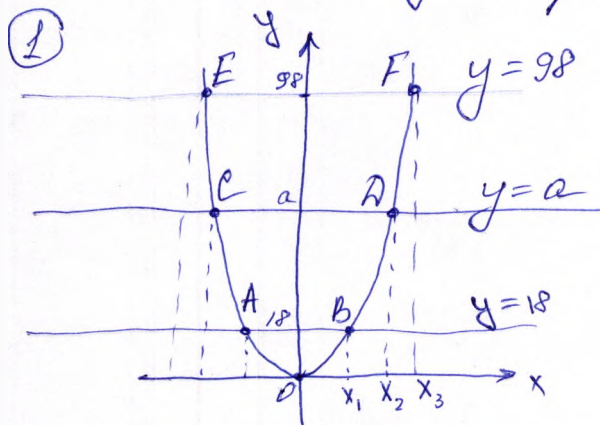
наим значение при наим. x

Задача №1

$y = 2x^2$ квадратичная функция
график - парабола, ветви вверх
вершина $O(0;0)$

$y = 98$
 $y = 18$ прямые
 $y = a$

$a > 0$, т.к. у параболы $y = 2x^2$ ветви вверх



Треугольник с углом 120° : тупоугольный
сторона напротив угла 120° - наибольшая

отрезок AB : $2x^2 = 18$ $AB = 2 \cdot 3 = 6$ ✓
($y = 2x^2$ и $y = 18$)
 $x^2 = 9$
 $x = \pm 3$

отрезок EF : $2x^2 = 98$ $EF = 2 \cdot 7 = 14$ ✓
 $x^2 = 49$
 $x = \pm 7$

$AB < EF$

① случай $18 < a < 98$

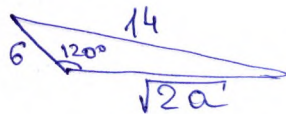
② случай $a > 98$

2 случая: ① прямая $y = a$ выше
прямой $y = 18$, но ниже
 $y = 98$
② $y = a$ выше $y = 18$ и
выше $y = 98$

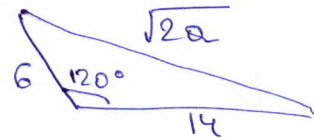
Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

1 случай



2 случай



$$\begin{aligned} CD: 2x^2 &= a & x &= \pm \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{2}}{2} \\ x^2 &= \frac{a}{2} & x &= \pm \frac{\sqrt{2a}}{2} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{a}{2}} & CD &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2a}}{2} = \sqrt{2a} \end{aligned}$$

Запишем т. косинусов

$$I \text{ сл} \quad 14^2 = 6^2 + (\sqrt{2a})^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2a} \cdot \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$196 = 36 + 2a + 6\sqrt{2a}$$

$$2a + 6\sqrt{2a} - 160 = 0$$

$$\sqrt{2a} = t, \quad t > 0$$

$$t^2 + 6t - 160 = 0$$

$$\begin{cases} t = -16 \\ t = 10 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$t = 10$$

$$\sqrt{2a} = 10$$

$$2a = 100$$

$$a = 50$$

II случай

$$(\sqrt{2a})^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos(120^\circ)$$

$$2a = 36 + 196 + 84$$

$$2a = 316$$

$$a = 158$$

Ответ: $a = 50$; $a = 158$



20 баллов

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

Задача №2

$$\sin 3x \cos x = \sin 5x \cos 3x \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\sin 3x \cdot \cos x) = \frac{1}{2} (\sin 5x \cos 3x)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sin \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} \right)$$

$$\sin 4x + \sin 2x = \sin 8x + \sin 2x$$

$$\sin 4x = \sin 8x$$

$$\sin 4x = \sin(2 \cdot 4x)$$

$$\sin 4x = 2 \cos 4x \sin 4x$$

$$\begin{cases} 2 \cos 4x = 1 \\ \sin 4x \neq 0 \\ \cos 4x = \frac{1}{2} \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \quad ?! \text{ Проверь?}$$

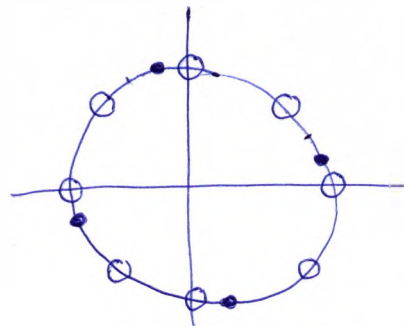
10 баллов

$$\begin{cases} 4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

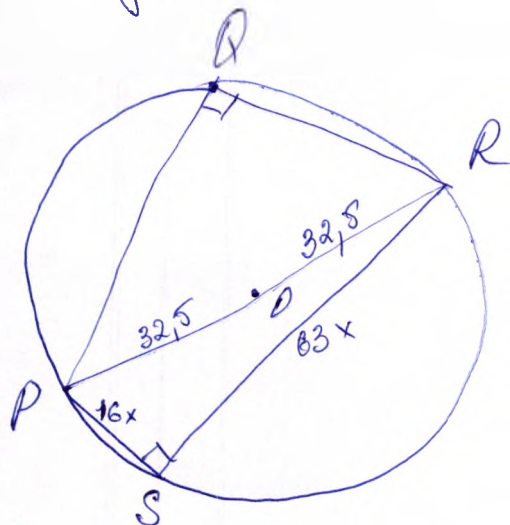
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$



Задача 5



Дано: $PQRS$ - вписанный
 $\frac{PS}{SR} = \frac{16}{63}$ $\angle PQR = 90^\circ$

$$P_{PQRS} = 168$$

Найти: S

Решение

1) $PQRS$ - вписанный $\Rightarrow \angle PQR + \angle PSR = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle PSR = 90^\circ$

2) $\angle PSR = 90^\circ$
 $\angle PQR = 90^\circ \mid \Rightarrow PR$ - диаметр
 $PD = DR = 32.5$ $PR = 65$

3) $\triangle PRS$ - прямоугольный ($\angle PSR = 90^\circ$)
 $PR^2 = PS^2 + SR^2$

$$65^2 = (16x)^2 + (63x)^2$$

$$65 = \sqrt{256x^2 + 3969x^2}$$

$$65 = 65x$$

$$x = 1 \longrightarrow PS = 16$$

$$SR = 63$$

4) $PQ + QR = P_{PQRS} - PS - SR = 168 - 16 - 63 =$
 $= 168 - 79 = 89$ ✓

5) $\triangle PQR$ - прямоугольный ($\angle PQR = 90^\circ$)
 $PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$$65^2 = QR^2 + PQ^2$$

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

$$\begin{cases} 65^2 = RQ^2 + PQ^2 \\ RQ + PQ = 89 \end{cases} \quad \text{верно}$$

$$RQ = 89 - PQ$$

$$65^2 = (89 - PQ)^2 + PQ^2$$

$$65^2 = 89^2 - 2 \cdot 89 \cdot PQ + 2PQ^2$$

$$PQ = a$$

$$4225 = 7921 - 178a + 2a^2$$

$$a^2 - 89a + 1848 = 0 \quad \text{верно}$$

$$D = 7921 - 4 \cdot 1848 = 529$$

$$a = \frac{89 \pm \sqrt{529}}{2} = PQ$$

$$\begin{cases} PQ = \frac{89 + \sqrt{529}}{2} \\ RQ = 89 - \frac{89 + \sqrt{529}}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} PQ = \frac{89 - \sqrt{529}}{2} \\ RQ = 89 - \frac{89 - \sqrt{529}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} RQ = \frac{89 - \sqrt{529}}{2} > 0 \\ PQ = \frac{89 + \sqrt{529}}{2} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} RQ = \frac{89 + \sqrt{529}}{2} > 0 \\ PQ = \frac{89 - \sqrt{529}}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{529} = ?$$

$$S_{PQRS} = S_{\triangle PSR} + S_{\triangle PQR}$$

$$S_{\triangle PSR} = \frac{PS + SR}{2} = \frac{16 + 63}{2} = \frac{79}{2}$$

$$S_{\triangle PQR} = \frac{RQ + PQ}{2} = \frac{\frac{89 + \sqrt{529}}{2} + \frac{89 - \sqrt{529}}{2}}{2} = \frac{89 + \sqrt{529} + 89 - \sqrt{529}}{4}$$

$$= \frac{178}{4} = \frac{89}{2}$$

$$S_{PQRS} = \frac{79}{2} + \frac{89}{2} = \frac{168}{2} = 84 \text{ (ед.}^2\text{)} \quad \text{Ответ: } 84$$