

Межрегиональная олимпиада школьников

«Будущие исследователи — будущее науки»

Тема: Нахождение площади многоугольника построением
равносоставленного ему квадрата

Секция: Математика

Научный руководитель: учитель математики
(ученая степень, звание, должность) _____

Т.Г.Миронова
(расшифровка подписи)

Количество баллов,
полученных на защите _____

100

(заполняется председателем жюри)

Председатель жюри _____

[Подпись]
(подпись)

Тородецкий С.Е.
(расшифровка подписи)

Работу выполнил(а)
учащий(ая)ся _____ класса

ГБОУ Школа №67

(полное наименование учебного заведения)

город Москва

(название населенного пункта)

Калажоков Жан-Булат Вячеславович
(Ф.И.О. учащегося ПОЛНОСТЬЮ)

Саров
2025 год

Оглавление

Введение	3
1. Цели и задачи работы	4
2. Равновеликость равноставленных фигур	6
3. Триангуляция многоугольника	6
3.1. Триангуляция выпуклого многоугольника	6
3.2. Триангуляция невыпуклого многоугольника	7
3.3. Триангуляция выпуклых и невыпуклых многоугольников.....	11
4. Равноставленность треугольника и прямоугольника	11
5. Равноставленность прямоугольника и квадрата	12
6. Равноставленность двух квадратов с одним квадратом	14
7. Результаты проведенного исследования.....	15
8. Выводы, сделанные в результате исследования, и вопросы для дальнейшего исследования поставленной задачи.....	15
9. Список литературы	16

Введение

Идея данной работы возникла при изучении на уроках геометрии темы о равносторонних и равновеликих многоугольниках.

Совершенно ясно, что две равносторонние фигуры, то есть фигуры, составленные из одних и тех же кусков, меньших, чем данные фигуры, и не имеющих общих внутренних точек, равновелики, то есть имеют одинаковую площадь. На данном утверждении основан простой метод вычисления площадей, который был известен еще Евклиду, жившему около 300 лет до н.э. Метод заключается в том, что для вычисления площади фигуры ее пытаются разбить («разрезать») на конечное число частей, из которых затем составляется простая фигура, площадь которой уже известна или легко находится.

Так, например, из курса геометрии 8 класса школьники узнают о разбиении параллелограмма на две части и составлении из них прямоугольника, а также о равносторонности произвольного треугольника и прямоугольника или трапеции и треугольника.

На данном этапе и возникла идея написания программы, позволяющей продемонстрировать метод нахождения площади многоугольника путем построения квадрата, равностороннего с данным многоугольником.

Как было указано выше, школьники имеют некоторые представления о равносторонности некоторых фигур, но идея данной работы заключалась в разработке алгоритма по нахождению площади произвольного выпуклого многоугольника путем прохождения «полного цикла», начиная от разбиения данного многоугольника на фигуры, из которых составляются другие многоугольники, которые в свою очередь разрезают и составляют из частей следующий вид многоугольников, и в конце концов получают квадрат с известной стороной, а в итоге – написании программы, демонстрирующей указанную цепочку разрезов и составлении новых многоугольников до получения площади. Более того, тема работы была усложнена тем, что была поставлена задача о написании указанных алгоритма и программы не только для выпуклых многоугольников, но и для невыпуклых.

Таким образом предстояло решить две задачи: одна о нахождении оптимального алгоритма по разрезанию данного многоугольника на куски, из которых в конце концов составлялся бы квадрат, и вторая по написанию программы, наиболее наглядно реализующей найденный алгоритм на экране компьютера.

1. Цели и задачи работы

Итак, исходя из полученных знаний на уроках геометрии, была выдвинута гипотеза, что алгоритм по нахождению площади произвольного многоугольника, наименьшим количеством повторений действий по разбиению (разрезанию) данного многоугольника и составлением из полученных кусков многоугольников равноставленных с исходным, и получением в результате квадрата с известной стороной, должен состоять из следующих этапов:

- I) Разбиении (разрезании) произвольного многоугольника (выпуклого, невыпуклого) на треугольники;
- II) Получении из треугольников равноставленных ему прямоугольников;
- III) Получении из прямоугольников равноставленных ему квадратов;
- IV) Получении из каждых двух квадратов одного квадрата, равноставленного с двумя данными.

В результате целью исследования стали, во-первых, разработка и обоснование методов получения многоугольников, равноставленных с данным/(и) в каждом из указанных выше пунктах алгоритма и, во-вторых, написание программы, позволяющей реализовать данный алгоритм.

Для реализации поставленной цели было необходимо решить три главные задачи:

- I изучить и выработать общий метод, позволяющий триангулировать («разрезать» на треугольники) не только выпуклые многоугольники, но и невыпуклые, без самопересечений и с самопересечениями;
- II изучить и выработать метод, позволяющий из полученных треугольников составлять квадрат с известной стороной;
- III по выработанным методам в первых двух пунктах разработать алгоритм и написать программу на языке Python, позволяющую на экране компьютера наглядно демонстрировать нахождение площади, используя равноставленность двух фигур.

Задача триангуляции выпуклых многоугольников не вызвала затруднений, а при триангуляции невыпуклых многоугольников был выработан метод, позволяющий находить так называемые «уши» многоугольника нахождением диагоналей, которые не пересекают другие стороны многоугольника и при этом находясь во внутренней области многоугольника.

Поиск метода, позволяющего из нескольких треугольников получать равноставленный им квадрат, привел к нахождению и доказательству равноставленности следующих фигур:

- 1) треугольник и прямоугольник;
- 2) прямоугольник и квадрат;
- 3) два квадрата и квадрат, равновеликий двум данным.

В результате проведенных исследований для реализации поставленной цели в пунктах I и II была выработана следующая пошаговая стратегия:

1 шаг: задать на экране компьютера многоугольник координатами его вершин;

2 шаг: произвести триангуляцию данного многоугольника с демонстрацией ее на экране;

3 шаг: продемонстрировать равносоставленность полученных треугольников с соответствующими им прямоугольниками (см. рис.1);

4 шаг: продемонстрировать равносоставленность полученных прямоугольников с соответствующими им квадратами (см. рис.2);

5 шаг: продемонстрировать равносоставленность каждой пары квадратов с одним квадратом известной стороны (см. рис.3);

6 шаг: найти площадь заданного многоугольника, нахождением площади квадрата, полученного на 5 шаге.

Рис.1

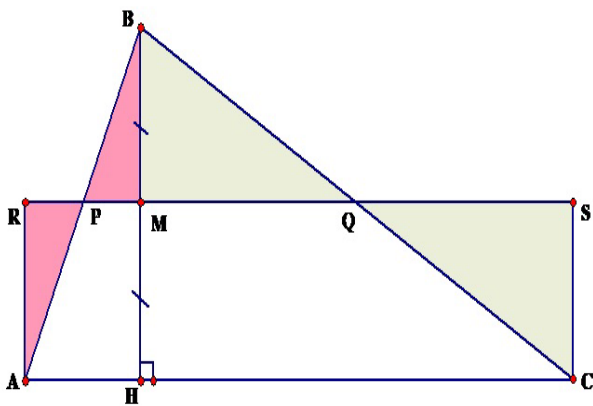


Рис.3

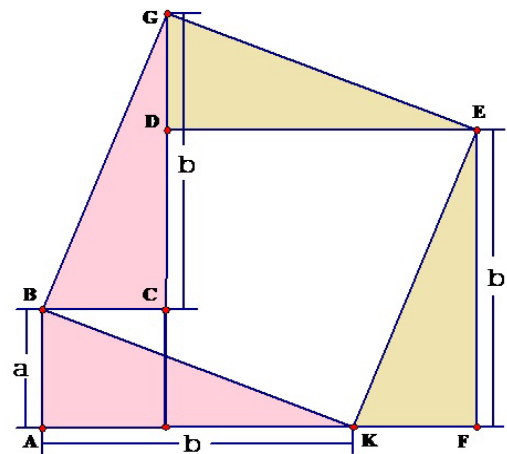
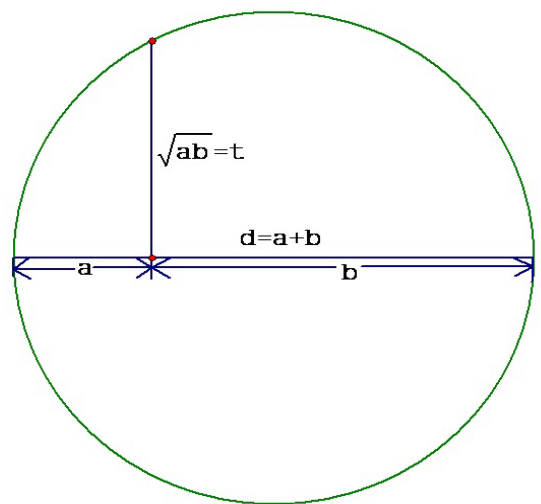
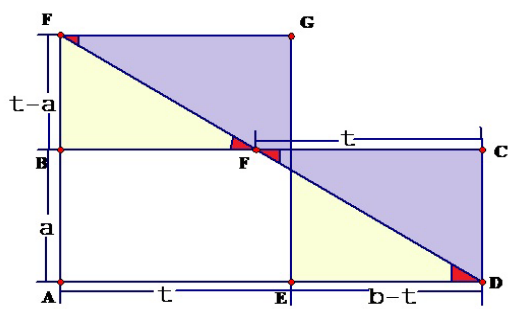


Рис.2



2. Равновеликость равноставленных фигур

Прежде, чем приступить к нахождению площади многоугольника, получением квадрата, равноставленного с данным многоугольником, докажем очевидность факта, что равноставленные фигуры имеют одинаковую площадь.

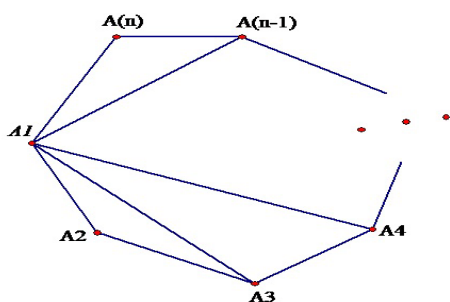
Доказательство данного утверждения основано на свойствах площадей многоугольников, а именно:

- 1) Равные многоугольники имеют равные площади;
- 2) Площадь многоугольника, составленного из нескольких многоугольников, у которых внутренние области не пересекаются, равна сумме площадей этих многоугольников.

Таким образом, если один многоугольник разбить (разрезать) на несколько многоугольников и затем из них составить другой многоугольник, то исходный и полученный многоугольники будут иметь равные площади, те есть, будут равновеликими.

3. Триангуляция многоугольника

Итак, для достижения цели - составления квадрата, равновеликого данному многоугольнику, первым шагом является операция по разбиению (разрезанию) многоугольника на треугольники (триангуляция). Рассмотрим эту операцию на разных видах многоугольников.



3.1. Триангуляция выпуклого многоугольника

Для триангуляции выпуклого многоугольника вспомним его определение, а именно: «Многоугольник называется выпуклым, если он

лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние стороны» Рис.4 ⁽¹⁾, а также определение его

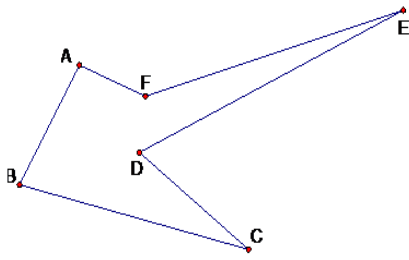
диагонали: «Отрезок, соединяющий любые две не соседние вершины, называется диагональю многоугольника» ⁽²⁾ Из определения следует, что внутренняя область выпуклого многоугольника состоит из пересечения полуплоскостей, задаваемых каждой из его сторон, а значит отрезок, соединяющий любые две точки A и B внутренней области многоугольника, содержится в каждой из этих полуплоскостей. Так как точки A и B были выбраны произвольно, то можно заключить, что отрезок, соединяющий любые две точки выпуклого многоугольника (в том числе и диагонали), содержатся в этом многоугольнике. Таким образом, диагональ выпуклого многоугольника лежит внутри этого многоугольника. Из доказанного получим способ триангуляции выпуклого n -угольника: соединим одну вершину с $(n-3)$ -мя не соседними вершинами. В результате каждая из проведенных диагоналей будет расположена внутри n -угольника, а значит сам n -угольник будет разбит на $(n-2)$ треугольника

3.2. Триангуляция невыпуклого многоугольника

Триангуляция невыпуклых многоугольников намного сложнее, чем триангуляция выпуклых. Для проведения этого процесса был выбран метод нахождения, так называемых «ушей» многоугольника. Ухо многоугольника – это треугольник, который можно выделить из многоугольника так, что его вершины находятся на его границе и при этом его стороны не пересекают других сторон многоугольника. Ухо формируется из трех последовательных вершин многоугольника, где центральная вершина является «выпуклой», то есть сторона треугольника, соединяющая две не соседние вершины, находится во внутренней области многоугольника.

¹ Геометрия 7-9 Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадо́мцев, Э.Г.Позняк, И.И.Юдина, стр. 99

² Геометрия 7-9 Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадо́мцев, Э.Г.Позняк, И.И.Юдина, стр. 98



Рассмотрим нахождение ушей на примере многоугольника $ABCDEF$. Если возьмем три последовательные вершины AFE , то центральная вершина F не является выпуклой, так как сторона AE треугольника AFE не находится во внутренней области многоугольника $ABCDEF$. Но если рассмотрим

Рис.5

треугольник FED , то центральная вершина E будет являться «выпуклой». Треугольник ABC также не является ухом многоугольника $ABCDEF$, так как сторона AC пересекает сторону DE .

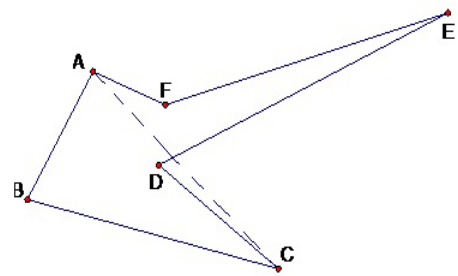


Рис. 6

В связи с указанным выше понятием «ушей» многоугольника, был разработан алгоритм их поиска.

Алгоритм поиска «ушей» многоугольника:

1) сначала необходимо пронумеровать вершины введенные пользователем на экране, для чего был также разработан алгоритм:

1.1. по координатам введенных точек, находим среднее арифметическое двух абсцисс x_i и x_j , которые находятся на наибольшем расстоянии друг от друга (для этого выбирается наибольшая и наименьшая абсциссы из введенных);

1.2. если найдется вершина, которая совпадает с точкой, найденной в п.1.1, то присваиваем ей название $A_0(x_0: y_0)$;

1.3. далее идет проверка координат вершин на равенство их абсциссы или ординаты с абсциссой или ординатой точки A_0 . Если такие найдутся, то им присваиваются следующие номера по порядку. Порядок нумерации определяется следующим образом: сначала нумеруются точки, у которых

$\begin{cases} x_i < x_0 \\ y_i = y_0 \end{cases}$, затем точки, у которых $\begin{cases} x_i = x_0 \\ y_i > y_0 \end{cases}$, далее – точки с координатами $\begin{cases} x_i > x_0 \\ y_i = y_0 \end{cases}$, и наконец – точки, координаты которых удовлетворяют $\begin{cases} x_i = x_0 \\ y_i < y_0 \end{cases}$

1.5. производится «сортировка» вершин по принадлежности к четырем «четвертям»: первая «четверть» - точки, координаты $(x_i; y_j)$ которых удовлетворяют условиям: $\begin{cases} x_i < x_0 \\ y_i > y_0 \end{cases}$, вторая «четверть» - точки, координаты $(x_i; y_j)$ которых удовлетворяют условиям: $\begin{cases} x_i > x_0 \\ y_i > y_0 \end{cases}$, третья «четверть» - точки, координаты $(x_i; y_j)$ которых удовлетворяют условиям $\begin{cases} x_i > x_0 \\ y_i < y_0 \end{cases}$, четвертая «четверть» - точки, координаты $(x_i; y_j)$ которых удовлетворяют условиям $\begin{cases} x_i < x_0 \\ y_i < y_0 \end{cases}$.

1.6. рассматриваются вершины, расположенные в каждой из указанных в п.1.5. «четвертей». В каждой четверти рассматриваются тангенсы углов наклона прямых, проходящих через введенную пользователем вершину и точку A_0 . Найденные угловые коэффициенты располагаются от большего к меньшему и в соответствии с установленным порядком нумеруются вершины многоугольника.

2) После проведенной в пункте 1) нумерации вершин, рассматриваем треугольник $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ и проверяем будет ли его сторона $A_i A_{i+2}$ пересекать другие стороны многоугольника. Для ответа на вопрос о пересечении $A_i A_{i+2}$ с другими сторонами был использован метод трассировки: берется каждая вершина многоугольника A_j , где $j \neq i, i+1, i+2$ и проводится луч, сонаправленный с положительным направлением оси OX . Если луч пересекает стороны многоугольника нечетное число раз, то вершина находится во внутренней области многоугольника, а если четное число раз, то во внешней области. На этом этапе возникли сложности с тем, что луч мог пройти через вершины или по какой-либо стороне многоугольника. Заметим, что, если луч проходит через сторону, то он обязан пройти и через вершину, а значит

достаточно проверять принадлежность лучу только какой-либо вершины. Для этого производится сравнение ординаты точки A_j с ординатами других вершин. Если ординаты совпадают, наклон луча меняется на очень маленькую величину.

3) Если сторона $A_i A_{i+2}$ пересекает другие стороны многоугольника, то переходим к рассмотрению треугольника $A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3}$.

4) Если сторона $A_i A_{i+2}$ не пересекает другие стороны многоугольника, то проверяем вершину A_{i+1} на выпуклость, чтобы избежать случаев, изображенных на рисунке 7:

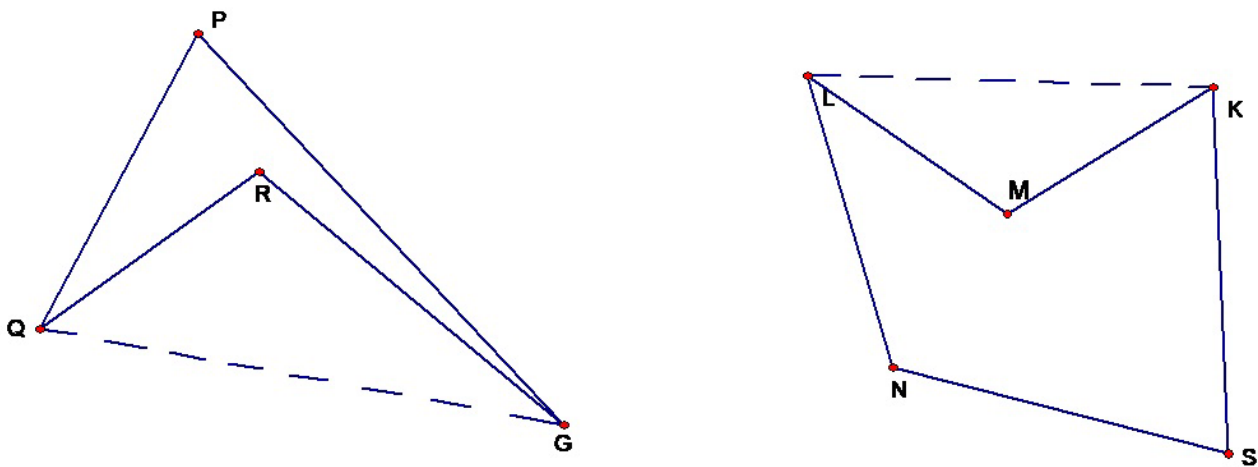


Рис.7

Для проверки вершины A_{i+1} на выпуклость возьмем точку из внутренней области треугольника $A_i A_{i+1} A_{i+2}$, для определенности берем точку пересечения медиан $M_i(m_i; n_i)$, и проводим из нее луч, как указано выше, то есть снова применяется метод трассировки. Если этот луч пересечет стороны многоугольника нечетное число раз, то вершина A_{i+1} является выпуклой, а значит сторона $A_i A_{i+2}$ расположена во внутренней области многоугольника и тогда треугольник $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ является ухом многоугольника. Выделяем это ухо и добавляем его в список триангуляции. В противном случае сторона $A_i A_{i+2}$ расположена вне внутренней области многоугольника и переходим к рассмотрению следующего треугольника.

5) После нахождения уха многоугольника, удаляем его из многоугольника, перенумеровываем вершины без A_{i+1} вершины, без их повторной сортировки

вершин по четвертям, указанным в пункте 1) алгоритма и повторяем его со 2) пункта, пока не останется только один треугольник.

3.3. Триангуляция выпуклых и невыпуклых многоугольников

В ходе решения вопроса о триангуляции многоугольника и для упрощения процесса, был сделан вывод, что не рационально разделять выпуклые и невыпуклые многоугольники. Чтобы не проводить сначала процесс определения вида многоугольника, а также учитывая, что алгоритм триангуляции невыпуклых многоугольников работает и для выпуклых, было принято решение применять алгоритм из предыдущего пункта ко всем многоугольникам, введенным пользователем. Но для применения разработанного алгоритма поиска ушей многоугольника нужно быть уверенным, что у любого многоугольника ($n \geq 4$) найдется хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри него.

Доказательство этого факта приведено в двухтомнике «Задачи по планиметрии» В.В.Прасолова³.

4. Равносоставленность треугольника и прямоугольника

Итак, мы смогли «разрезать» многоугольник на треугольники. Далее стояла задача по нахождению прямоугольника, равноставленного, а значит и равновеликого каждому из полученных треугольников.

Докажем равноставленность треугольника и некоторого прямоугольника. Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Пусть сторона AC - наибольшая. Опустим из вершины B высоту BH , где H – основание высоты, то есть H лежит на отрезке AC . Через точку M - середину BH проведем прямую a , параллельную AC . Обозначим через P и Q точки пересечения прямой a со сторонами AB и BC соответственно, и опустим на эту прямую перпендикуляры AR и CS .

Равноставленность треугольника ABC и прямоугольника $ARSC$ следует из равенства треугольников: APR и BPM , CSQ и BMQ . Таким образом, мы получили, что любой треугольник мы можем разбить на три части, из которых

³ Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: В 2 ч. Ч. 2 Наука. Физматлит, 1995-240с. Глава 22, задача 22.20

сможем составить прямоугольник, у которого одна сторона равна большей стороне треугольника, а вторая – половине высоты, опущенной на большую сторону треугольника.

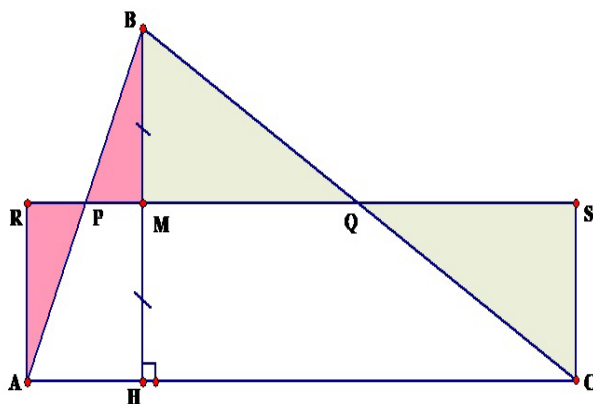


Рис.8

5. Равносоставленность прямоугольника и квадрата

Следующим этапом по построению квадрата, равновеликого данному многоугольнику являлся поиск алгоритма по разрезанию каждого полученного прямоугольника на такие части, из которых можно составить равновеликий ему квадрат.

Докажем равносоставленность прямоугольника со сторонами a и b и квадрата со стороной \sqrt{ab} . Для этого рассмотрим прямоугольник $ABCD$, в котором меньшая сторона $AB = a$, большая сторона $AD = b$. Сначала построим отрезок $t = \sqrt{ab}$:

- 1) отложим на прямой отрезок $PQ = d = a + b$, причем $PM = a$, $MQ = b$;
- 2) построим окружность на данном отрезке, как на диаметре;
- 3) в точке M восстановим перпендикуляр к прямой PQ до пересечения с окружностью в точке N
- 4) $NQ = t = \sqrt{ab}$, как высота, проведенная к гипотенузе в прямоугольном треугольнике PNQ ($\angle N = 90^\circ$)

Затем проведем следующие построения:

- 1) отложим на стороне CB прямоугольника $ABCD$ отрезок $CF = t$;
- 2) проведем прямую DF до пересечения с прямой AB в точке R ;

3) через точку R проведем прямую RG , параллельную прямой AD , причем так, что $RG = CF = t$;

4) Из точки G опустим перпендикуляр на AD и через E обозначим точку пересечения;

5) $ARGE$ – искомый квадрат со стороной $t = \sqrt{ab}$, так как по построению $ARGE$ – прямоугольник со стороной $RG = t = \sqrt{ab}$, а из равенства двух пар прямоугольных треугольников: $BRF = ESD$ ($BF = DE = b - t, \angle F = \angle D$), $RGS = FCD$ ($RG = FC, \angle R = \angle S$) следует, что $AR = AB + BR = a + SE = a + (b - t)tg\angle SDE = a + (b - t)tg\angle CSD = a + (b - t)\frac{CD}{FC} = a + (b - t)\frac{a}{t} = a + \frac{ba}{t} - a = \frac{ba}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$.

Итак, для разбиения прямоугольника $ABCD$, отметим на стороне BC точку F , так что $CF = t$, произведем «разрезание» по отрезку DF , затем «передвинем» треугольник FSD вдоль прямой RD , до пересечения с прямой AB , отметим на RD точку S и произведем второе «разрезание» по отрезку SD , перпендикулярному AD .

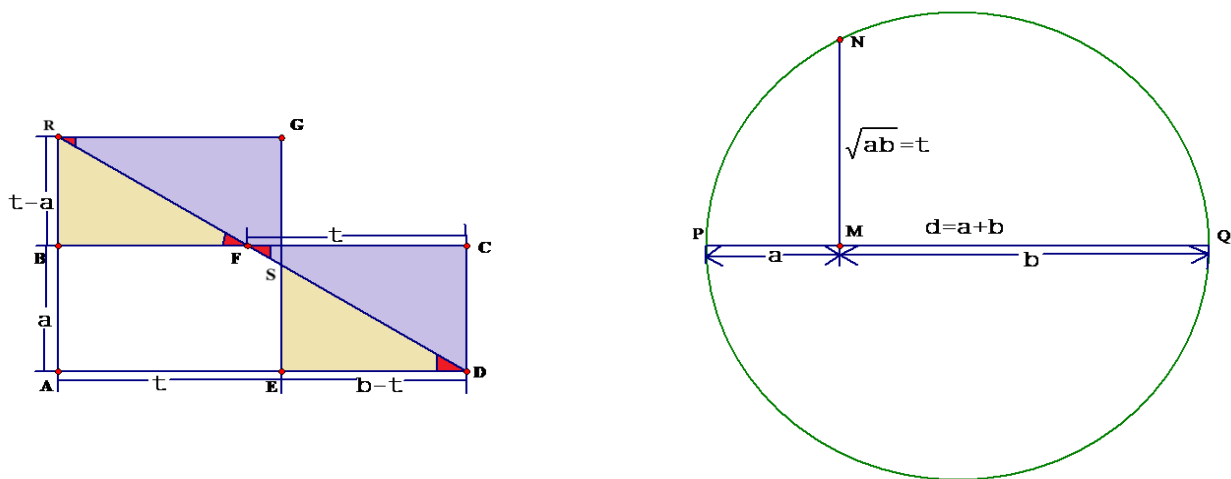
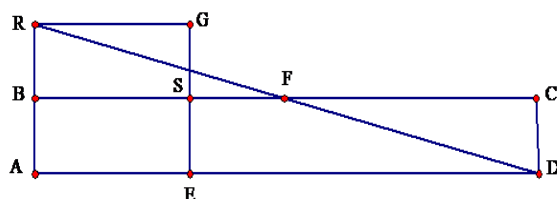


Рис.9

Замечание: если точка F окажется за пределами квадрата $ARGE$, то есть $t < b - t$, тогда поступаем следующим образом:



разрезаем прямоугольник $ABCD$ по средней линии, параллельной AB , а затем

Рис.10

«накладываем» полученные половинки друг на друга и производим построения, указанные выше.

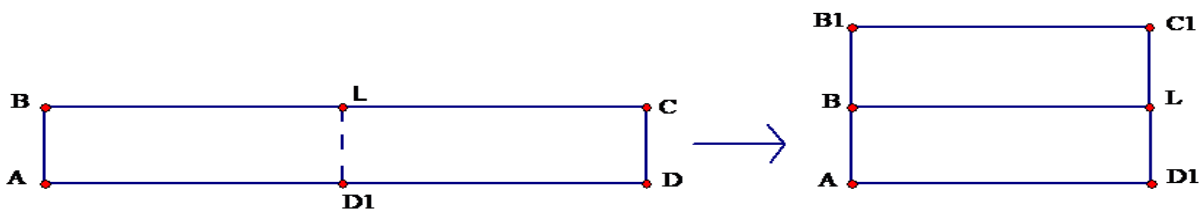


Рис.11

Если и после наложения двух половинок прямоугольника, точка F_1 окажется за пределами квадрата $AR_1G_1E_1$, то произведем «разрезание» и «накладывание» половинок еще раз и будем так поступать, пока точка F_i не окажется внутри квадрата $AR_iG_iE_i$

6. Равносоставленность двух квадратов с одним квадратом

Итак, последним этапом исследования являлось нахождение алгоритма по разрезанию каждого двух полученных квадратов и составлении из частей одного, равновеликого им квадрата.

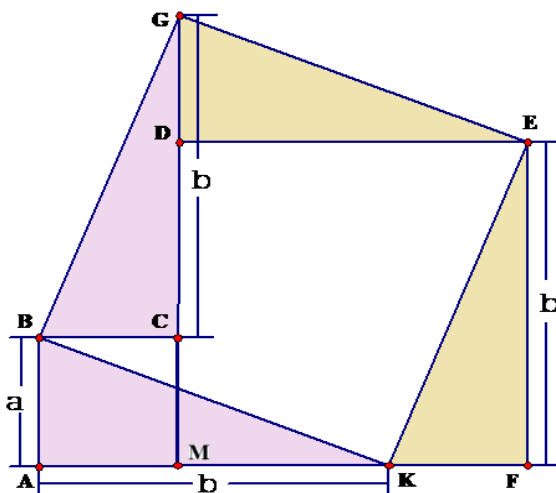


Рис.12

отметим точку K так, что $AK = b$ и соединим KE . Произведем «разрезание» по отрезкам BK и KE .

Равносоставленность квадратов $ABCM$ и $MDEF$ с квадратом $BGEM$ следует из равенства треугольников ABK и CBG , KFE и GDE

Замечание: если $a = b$, два квадрата со стороной a равносоставлены с квадратом стороны $c = \sqrt{a^2}$. «Разрезание» в этом случае производится по диагоналям квадратов.

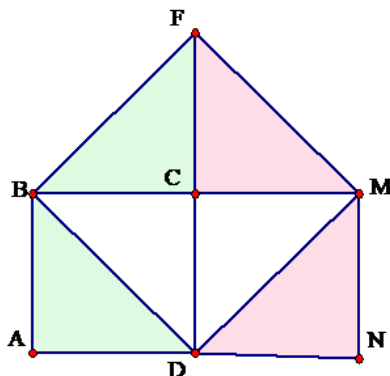


Рис. 13

7. Результаты проведенного исследования

В результате проведения данного исследования:

- 1) были разработаны и протестированы алгоритмы для вычисления площадей выпуклых и невыпуклых многоугольников методом нахождения квадрата с известной стороной, равносоставленного данному многоугольнику;
- 2) написанная программа на языке Python предоставляет возможность визуализировать процесс вычисления площадей различных многоугольников, что позволяет учащимся лучше понимать свойства геометрических фигур;
- 3) возможно, созданная программа, может быть использована не только в образовательных целях, но и в практических приложениях, таких как дизайн, компьютерная графика и другие области, где требуется работа с геометрическими фигурами.

8. Выводы, сделанные в результате исследования, и вопросы для дальнейшего исследования поставленной задачи

В результате проделанного исследования были сделаны следующие выводы:

- 1) Разработанный алгоритм нахождения площадей многоугольников может применяться как к выпуклым, так и к невыпуклым многоугольникам, что подтверждает его универсальность;

- 2) созданная программа на языке Python делает процесс обучения наглядным, демонстрируя некоторые непростые вопросы построения, что может повысить интерес учеников к геометрии;
- 3) визуализация нахождения площади методом построения равносторонней фигуры, способствует развитию у школьников абстрактного мышления и демонстрирует, что задачи по нахождению площади многоугольников можно решать не только с применением формул

Разработка алгоритмов и написание программы поставили перед нами несколько вопросов для дальнейшего исследования по нескольким направлениям:

- 1) написать алгоритм и программу для нахождения площадей более сложных многоугольников, например с самопересечениями или с «отверстиями» внутри;
- 2) оптимизировать существующий алгоритм;
- 3) рассмотреть практическое применение алгоритма в таких областях, как дизайн или компьютерная графика;
- 4) сделать более подробным и наглядным процесс «разрезания» каждого вида многоугольника и составления из полученных частей равносторонней фигуры.

9. Список литературы

1. Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, С.А. Шестаков, И.И. Юдина Геометрия
Дополнительные главы к школьному учебнику 8 // Просвещение, 1996. С. 205
 2. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: В 2 ч. Ч 2: Учеб. Пособие. 3-е изд., стер.-М:
Физматлит, 1995. – 240 с.
-

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

Шифр

MB-3

Предмет Математика

ФИО участника (полностью) Калашников Жан-Пьер
Вячеславович

Дата рождения (дд.мм.гггг) 09.07.2008

Город Москва Область Москва

Образовательное учреждение 2504 школа № 67

Класс 10Г


Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

Шифр

ПБ-3

Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5	Итоговый балл	Подписи членов комиссии
15	0	—	15	25	55	

①

$y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямую $y = -1$ в точках, когда

$2x^2 - 5x + 1 = -1$, т. е. $2x^2 - 5x + 2 = 0$; корни 2 ; $\frac{1}{2}$, а

т.к. как ~~прямая~~ ~~горизонтальная~~ прямая горизонтальна то
длина отрезка на нем — это расстояние
между этими точками, т. е. $(\frac{3}{2})$. С другой прямой

$y = 4$ пересекается в точках $(3; 4)$ и $(-\frac{1}{2}; 4)$; расстояние;

$(\frac{7}{2})$. Эти два отрезка составляют с проекцией прямоу-
гольный Δ -к; Если: (1)

$$(a_1 - a_2)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (a_1 - a_2)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \quad (2)$$

чтобы найти
 a_1 и a_2

$$a = 2x^2 - 5x + 1$$

$$a_1 = \frac{5 + \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot (1 - a)}}{4}$$

$$a_2 = \frac{5 - \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot (1 - a)}}{4}$$

неверная формула
корней квадратного
уравнения
т. е. $(a_1 - a_2)^2 = \frac{25 + 4 \cdot 2 \cdot (1 - a)}{4} =$
 $= \frac{33 - 8a}{4}$

$$(1) \quad \frac{33 - 8a}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$33 - 8a = 49 + 9$$

$$a = -\frac{25}{8}$$

$$(2) \quad \frac{33 - 8a}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$33 - 8a + 9 = 49$$

$$a = -\frac{7}{8}$$

15

Ответ: $a = -\frac{7}{8}$; $a = -\frac{25}{8}$

- ⑤ Так как в каждом промежутке 30 чисел, всего чисел 24, по 4 в каждом. То их сумма будет максимальной если самые большие среди них будут самыми большими в промежутке; ~~а если наоборот~~ такие как мы берем промежутки с наименьшими числами и разность двух соседних не должна отличаться на 30, то их разность должна быть в соотношении в каждом промежутке, тогда есть больше всего. то есть набор будет следующий:

120, 119, 118, 117, 116, 115 ~~114, 113, 112, 111, 110, 109, 108, 107, 106, 105, 104, 103, 102, 101, 100, 99, 98, 97, 96, 95, 94, 93, 92, 91, 90~~ 84, 83, 82, 81, 80

48, 47, 46, 45, 44, 43 12, 11, 10, 9, 8, 7

Их сумма будет 1524

Ответ: 1524

② I $3ax^2 - 5x + 2a = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24a}}{6}$$

(1) $\frac{5 + \sqrt{25 - 24a}}{6} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 24}}{4}$

$$20 + 4\sqrt{25 - 24a} = -6a \pm 6\sqrt{a^2 + 24}$$

$$20 + 4\sqrt{25 - 24a} = -6a + 6\sqrt{a^2 + 24}$$

$$-20 - 6a$$

II $2x^2 + ax - 3 = 0$
 $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 24}}{4}$

Результата нет.

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

Черновик

$$\begin{array}{r} 1 \\ 79 \\ +84 \\ \hline 163 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 163 \\ \hline 489 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ 48 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 273 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 57 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 273 \\ 57 \\ \hline \end{array}$$

$$330$$

~~40~~

$$\frac{40}{v_1} = \frac{(a-40)\sin 30^\circ}{v_2}$$

$$v_2 = \frac{a - (a-40)\sin 30^\circ}{\frac{40}{v_1}}$$

$$\frac{40}{v_1}$$

$$\frac{0,5a + 20}{v_2} = \frac{40}{v_1}$$

$$\frac{a}{v_2} = \frac{a-60}{v_1}$$

$$120$$

$$118$$

$$116$$

$$114$$

$$112$$

$$110$$

$$120$$

$$1524$$

$$89$$

$$180^\circ - \alpha =$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25}$$

$$115 + 120$$

$$235$$

$$235$$

$$235$$

$$705$$

$$\frac{40}{v_1} = \frac{0,5a + 20}{v_2}$$

$$\frac{40}{0,5a + 20} = \frac{a-60}{a}$$

$$\frac{40v_2}{v_1(0,5a + 20)}$$

$$40a = 0,5a^2 + 10a - 1200$$

$$-10a + 1200$$

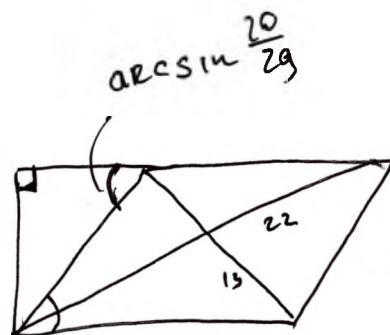
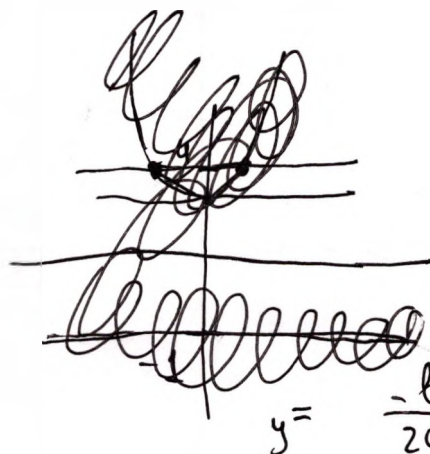
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{40}{0,5a + 20}$$

$$0,5a^2 + 30a - 1200$$

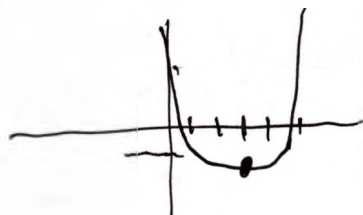
Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

Черновик

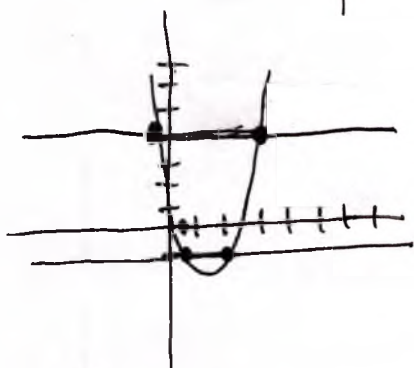


==



$$25 = 25 - 4 \cdot 8$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$



$$4.5$$

$$4.5 - 5$$



$$\odot \leftarrow \frac{1}{2}$$

$$-1 = 2x^2 - 5x + 1$$

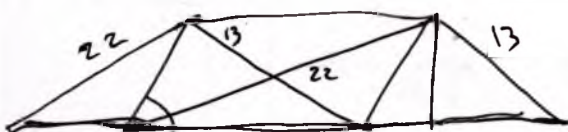
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$



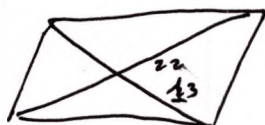
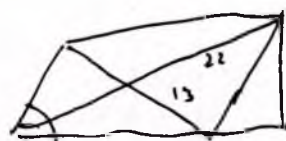
$$25 - 16 = 9 \cdot 3$$

$$\frac{8}{4} \quad 5 - 3$$

$$2 \quad \frac{1}{2} \quad 90 - 90 + \arcsin$$



$$2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{25}{25}$$



$$13 \quad 169$$

$$\frac{22}{44} \quad 464$$

$$180 - \arcsin \frac{20}{29}$$

$$90 - \arcsin \frac{20}{29}$$

$$90 + \arcsin \frac{20}{29}$$

