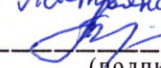


Межрегиональная олимпиада школьников

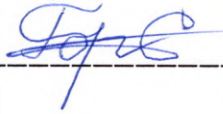
«Будущие исследователи — будущее науки»

Способы решения нестандартных
неравенств

Секция: математика

Научный руководитель Останикович Татьяна Эдгаровна, учитель математики
(ученая степень, звание, должность)  Останикович Т.Э.
(подпись) (расшифровка подписи)

Количество баллов,
полученных на защите 50
(заполняется председателем жюри)

Председатель жюри  Чероженский С.Е.
(подпись) (расшифровка подписи)

Работу выполнил(а)
учащий(ая)ся 10Ф класса

МБОУ СОШ №6

(полное наименование учебного заведения)

города Мытищи
(название населенного пункта)

Плужан Петр Васильевич
(Ф.И.О. учащегося ПОЛНОСТЬЮ)

Саров
2025 год

**Межрегиональная научная конференция старшеклассников
«XXV Школьные Харитоновские чтения»
(межрегиональная олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»)**

Способы решения нестандартных неравенств

Исследовательская работа
Направление “*Математика*”

**Тукан Пётр Васильевич
10 класс
Научный руководитель -
Останькович Татьяна Эдгаровна,
учитель математики**

2024 г.

Оглавление:

| | |
|---|----|
| 1. Введение..... | 3 |
| 2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца..... | 5 |
| 3. Неравенства о средних гармоническом, геометрическом, арифметическом и квадратическом..... | 7 |
| 4. Неравенство Бернулли..... | 13 |
| 5. Преобразование Абеля..... | 14 |
| 6. Транснеравенство (перестановочное неравенство)..... | 15 |
| 7. Неравенство Чебышёва для сумм..... | 18 |
| 8. Заключение..... | 21 |
| 9. Литература..... | 22 |

Введение

Нестандартные неравенства - одна из самых интересных тем в математике. Здесь и далее под словом “нестандартные” подразумеваются те неравенства, которые встречаются чаще всего в классических олимпиадах (но и в перечневых тоже нередки). Если для решения так называемых “школьных” неравенств используют метод интервалов и т.п., то для решения нестандартных (олимпиадных) неравенств используют неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенства средних гармоническом, геометрическом, арифметическом и квадратическом, транснеравенство и др. Эти способы и методы рассмотрены в данной исследовательской работе.

Цель:

Исследовать некоторые способы решения нестандартных неравенств (а именно: с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца, неравенств о средних гармоническом, геометрическом, арифметическом и квадратическом, неравенства Бернулли, преобразования Абеля, транснеравенства, неравенства Чебышёва для сумм), выделяя их основные принципы и области применения, а также продемонстрировать их эффективность на примерах.

Задачи:

1. Изучить основные неравенства-инструменты, используемые при решении нестандартных неравенств.
2. Собрать и классифицировать примеры задач, в решении которых используются указанные выше неравенства.
3. Подвести итог.

Актуальность работы

Неравенства, такие как неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенства о средних, транснавенство, неравенство Чебышёва для сумм и др., являются мощными инструментами, позволяющими находить оптимальные решения. Их изучение не только углубляет понимание математически, но и развивает критическое мышление и творческий подход к решению задач. Однако, несмотря на важность этих способов, многие учащиеся сталкиваются с трудностями при их применении, что подчеркивает необходимость систематизации знаний и практических умений в этой области.

Актуальность данной исследовательской работы заключается в том, что она направлена на изучение и анализ методов решения олимпиадных неравенств, что позволит учащимся не только лучше подготовиться к олимпиадам, но и развить уверенность в своих силах при решении сложных задач. Кроме того, систематизация и классификация методов решения неравенств помогут создать удобный справочный материал, который будет полезен как для учащихся, так и для преподавателей.

Таким образом, данное исследование не только обогатит теоретическую базу по теме неравенств, но и послужит практическим руководством для школьников, стремящихся к успеху в олимпиадной математике. В условиях растущей конкуренции и повышенных требований к знаниям и навыкам учащихся, подобные исследования становятся особенно актуальными и необходимыми.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)

Формулировка

Для двух наборов произвольных действительных чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ выполняется следующее неравенство:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Доказательство

Способ 1

Пусть у нас в n -мерном пространстве есть 2 вектора с координатами $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Тогда их скалярное произведение будет равно $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ с одной стороны и $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \cdot \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \cdot \cos \alpha$ - с другой. Возведя оба выражения в квадрат и приравняв, получим:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \cos^2 \alpha.$$
$$\cos^2 \alpha \leq 1, \quad \text{значит, } (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \text{ Ч.т.д.}$$

Способ 2

Рассмотрим выражение $(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$. Это сумма квадратов неотрицательна, а, значит, дискриминант квадратного трёхчлена $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ $D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ неположителен.

Отсюда, $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ (перенесли в разные части и поделили на 4).

Примеры использования в решении нестандартных неравенств

№1

Для положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n докажите неравенство $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$ (лемма Титу).

Док-во:

Пусть $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ и $y_i = \sqrt{b_i}$. Тогда по неравенству Коши-Буняковского-Шварца:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2.$$

$$\text{Подставим: } \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Поделим обе стороны на $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ и получим желаемое неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \text{ Ч.т.д.}$$

№2 [9]

Для положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Док-во:

По доказанной в примере №1 лемме Титу для a_1, a_2, \dots, a_n и $b_1 = a_2, b_2 = a_3, \dots, b_n = a_1$:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Подставим: $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_2 + \dots + a_n + a_1} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Ч.т.д.

№3 [9]

Доказать, что для $a + b + c = 1$ верно неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Док-во:

$$1 = 1^2 = (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2) \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Разделив обе части неравенства на 3, получим $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Ч.т.д.

№4 [9]

Доказать, что верно неравенство $\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta \leq 2$.

Док-во:

Применим неравенство Коши-Буняковского-Шварца для наборов чисел $\{\sin \alpha; \cos \alpha; 1\}$ и $\{\sin \beta; 1; \cos \beta\}$:

$$(\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta)^2 \leq (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1)(\sin^2 \beta + 1 + \cos^2 \beta)$$

$$(\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta)^2 \leq (1 + 1) \cdot (1 + 1)$$

$$(\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta)^2 \leq 4$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta \leq 2$$

Ч.т.д.

Неравенства о средних гармоническом, геометрическом, арифметическом и квадратическом

Формулировка

Для любых неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_n верны следующие неравенства:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \text{ где}$$

$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ - среднее гармоническое,
 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ - среднее геометрическое,
 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ - среднее арифметическое,
 $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ - среднее квадратическое.

Доказательство

1. Неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим

Понеравенству КБШ для наборов неотрицательных чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\{b_1 = 1, b_2 = 1, \dots, b_n = 1\}$:

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot n \\ \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n^2} &\leq \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}{n} \\ \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \end{aligned}$$

2. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

Докажем для $\{a, b\}$ ($n=2$):

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ a+b &\geq 2 \cdot \sqrt{ab} \\ a - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b &\geq 0 \\ (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0 - \text{верно, значит, и } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ верно.} \end{aligned}$$

Докажем для $\{a, b, c, d\}$ ($n=4$):

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} - \text{верно}$$

Таким способом можно доказать и для $n=8, 16, 32, \dots$ (для всех $n = 2^k$).

Докажу для $\{a_1, \dots, a_8\}$ ($n=8$):

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_8}{8} &= \frac{\frac{a_1 + \dots + a_4}{4} + \frac{a_5 + \dots + a_8}{4}}{2} \geq \frac{\sqrt[4]{a_1 \dots a_4} + \sqrt[4]{a_5 \dots a_8}}{2} \geq \\ &\geq \sqrt{\sqrt[4]{a_1 \dots a_4} \cdot \sqrt[4]{a_5 \dots a_8}} = \sqrt[8]{a_1 \dots a_8} \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим частный случай для $\{a, b, c, d\}$ ($n=4$), где $d = \frac{a+b+c}{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} = \frac{\frac{4(a+b+c)}{3}}{4} = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abcd} \\ &= \sqrt[4]{abc \frac{(a+b+c)}{3}} \\ \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[4]{abc \frac{(a+b+c)}{3}} \\ \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 &\geq abc \frac{(a+b+c)}{3} \\ \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 &\geq abc \end{aligned}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} - \text{доказали для } n=3$$

Таким образом можно доказать для любого n : доказываем до минимальной степени двойки, большей n , а дальше подставляем $\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$ вместо a_n и немного преобразуем до тех пор, пока не докажем до интересующего n . Значит, мы доказали для всех n . Это своеобразная “двойная индукция”. Пример для $n=200$: мы знаем для $n=2$, значит, мы знаем для $n=4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$. Если мы знаем для n , то мы знаем для $n-1$, поэтому далее мы по единичке “спускаемся” с 256 вниз до 200.

3. Неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим

По неравенству между средними арифметическим и геометрическим для

$$\left\{ \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n} \right\}:$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \dots \frac{1}{a_n}}}{n} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \dots a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

Объединим доказанные нами неравенства:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Примеры использования в решении нестандартных неравенств

№1 [16]

Докажите, что для $a, b, c > 0$ верно неравенство

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Док-во:

Пусть $b + c = x, a + c = y, a + b = z$.

$$(a + b) + (b + c) + (a + c) = 2(a + b + c) = x + y + z.$$

Допустим, что неравенство верно:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x + y + z}{9}$$

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3} - \text{верно, т.к. это неравенство между средним гармоническим}$$

и средним арифметическим для $\{x, y, z\}$.

Значит, и исходное неравенство верно. Ч.т.д.

№2

Даны положительные x, y, z такие, что $x \cdot y \cdot z = 1$.

$$\text{Докажите, что } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \leq \frac{x\sqrt{x}}{2} + \frac{y\sqrt{y}}{2} + \frac{z\sqrt{z}}{2}.$$

Док-во:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{x+z} + \frac{2z}{x+y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\frac{y+z}{x}} + \frac{2}{\frac{x+z}{y}} + \frac{2}{\frac{x+y}{z}} \right)$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{y}{x} + \frac{z}{x}} &= \frac{2}{\frac{1}{\frac{xz}{x}} + \frac{z}{x}} = \frac{2}{\frac{1}{x^2z} + \frac{z}{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2z} \cdot \frac{z}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^3}}} = \frac{1}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = x\sqrt{x} \\
\frac{2}{\frac{x}{y} + \frac{z}{y}} &= \frac{2}{\frac{1}{\frac{yz}{y}} + \frac{z}{y}} = \frac{2}{\frac{1}{y^2z} + \frac{z}{y}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2z} \cdot \frac{z}{y}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^3}}} = \frac{1}{\frac{1}{y\sqrt{y}}} = y\sqrt{y} \\
\frac{2}{\frac{x}{z} + \frac{y}{z}} &= \frac{2}{\frac{1}{\frac{yz}{z}} + \frac{y}{z}} = \frac{2}{\frac{1}{yz^2} + \frac{y}{z}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{yz^2} \cdot \frac{y}{z}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^3}}} = \frac{1}{\frac{1}{z\sqrt{z}}} = z\sqrt{z} \\
\frac{2}{\frac{y}{x} + \frac{z}{x}} + \frac{2}{\frac{x}{y} + \frac{z}{y}} + \frac{2}{\frac{x}{z} + \frac{y}{z}} &\leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} \\
\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} &\leq \frac{1}{2}(x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z}) \\
\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} &\leq \frac{x\sqrt{x}}{2} + \frac{y\sqrt{y}}{2} + \frac{z\sqrt{z}}{2}
\end{aligned}$$

Ч.т.д.

№3

Докажите, что для положительных a, b, c таких, что $a + b + c = 1$, верно

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Док-во:

Заметим, что по неравенству о среднем арифметическом и среднем гармоническом для $\left\{\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-b}\right\}$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}\right) = \frac{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{1-a}} + \frac{1}{\frac{1}{1-b}}} = \frac{2}{(1-a) + (1-b)} = \frac{2}{2-a-b}$$

$$\text{Аналогично } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}\right) \geq \frac{2}{2-b-c} \text{ и } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-a}\right) \geq \frac{2}{2-c-a}.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} &\geq \frac{2}{2-a-b} + \frac{2}{2-b-c} + \frac{2}{2-c-a} \\
&= \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c} \\
\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} &\geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}
\end{aligned}$$

Ч.т.д.

№4

Докажите, что для $0 \leq x, y \leq 1$ верно неравенство $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$.

Док-во:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$$

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{4}{1+xy}$$

Предположим, что $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$.

$$\frac{2}{1+xy} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \geq 0$$

$$\frac{2(1+x^2)(1+y^2) - (1+y^2)(1+xy) - (1+x^2)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$(1+x^2)(1+y^2)(1+xy) > 0$ при $0 \leq x, y \leq 1$

$$2(1+x^2)(1+y^2) - (1+y^2)(1+xy) - (1+x^2)(1+xy) \geq 0$$

$$2(1+x^2+y^2+x^2y^2) - (1+y^2+xy+xy^3) - (1+x^2+xy+x^3y) \geq 0$$

$$2 + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 - 1 - y^2 - xy - xy^3 - 1 - x^2 - xy - x^3y \geq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x^2y^2 - xy^3 - x^3y \geq 0$$

$$(x-y)^2 + xy(-x^2 + 2x^2y^2 - y^2) \geq 0$$

$$(x-y)^2 - xy(x^2 - 2x^2y^2 + y^2) \geq 0$$

$$(x-y)^2 - xy(x-y)^2 \geq 0$$

$(x-y)^2(1-xy) \geq 0$ - верно, значит, и $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ верно.

Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $\left\{ \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2} \right\}$:

$$\sqrt{\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \leq \frac{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} \leq \frac{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} \leq \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

Сложим $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ и $\frac{2}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} \leq \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$:

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{4}{1+xy}$$

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{4}{1+xy} - \text{верно, значит, верно и}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}. \text{ Ч.т.д.}$$

Неравенство Бернулли

Формулировка

Для любого натурального $n \in N$ и $x \geq -1$ верно неравенство $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Доказательство

Докажем методом математической индукции.

При $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$ - верно

Предположим, что неравенство верно для n .

Докажем, что тогда оно верно и для $n + 1$.

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + x + nx = 1 + (n + 1)x$ - верно, значит, мы доказали для всех n .

Примеры использования

Чаще всего неравенство Бернулли используют для оценки рациональных чисел при сравнении с каким-либо числом (промежуточная стадия в решении более сложных неравенств; расстановка критических точек на числовой прямой в методе интервалов).

№1

Сравнить числа $\left(\frac{13}{7}\right)^5$ и 5.

Решение: $\left(\frac{13}{7}\right)^5 = \left(1 + \frac{6}{7}\right)^5 > 1 + 5 \cdot \frac{6}{7} = 1 + \frac{30}{7} = 5 + \frac{2}{7} > 5$.

Ответ: $\left(\frac{13}{7}\right)^5 > 5$.

№2

Сравнить числа $\left(\frac{17}{3}\right)^6$ и 29.

Решение: $\left(\frac{17}{3}\right)^6 = \left(1 + \frac{14}{3}\right)^6 > 1 + \frac{14}{3} \cdot 6 = 1 + 28 = 29$.

Ответ: $\left(\frac{17}{3}\right)^6 > 29$.

№3

Сравнить числа $\left(\frac{13}{14}\right)^7$ и $\frac{417}{835}$.

Решение: $\left(\frac{13}{14}\right)^7 = \left(1 - \frac{1}{14}\right)^7 > 1 - 7 \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{2} > \frac{417}{835}$.

Ответ: $\left(\frac{13}{14}\right)^7 > \frac{417}{835}$.

Преобразование Абеля

Формулировка

Преобразование Абеля позволяет переписать попарное произведение чисел a и b немного по-другому: $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n$, где $S_k = a_1 + \dots + a_k$.

Доказательство

$$\begin{aligned} a_k &= S_k - S_{k-1} \\ \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) b_k &= \sum_{k=1}^n S_k b_k - \sum_{k=1}^n S_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^n S_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k b_{k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_k + S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_{k+1} - S_0 b_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n \quad (\text{т. к. } S_0 = 0) \end{aligned}$$

Ч.т.д.

Пример

$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ и $a_1 a_2 \dots a_k \geq b_1 b_2 \dots b_k, \forall k = \overline{1, n}$. Докажите, что $a_1 + \dots + a_n \geq b_1 + \dots + b_n$.

Док-во:

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{b_i} - 1 \right) b_i \geq 0$$

Применим преобразование Абеля:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{b_i} - 1 \right) b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}) + S_n b_n, \quad S_i = \sum_{k=1}^i \left(\frac{a_k}{b_k} - 1 \right) = \sum_{k=1}^i \frac{a_k}{b_k} - i$$

Применим неравенство Коши для суммы в выражении для S_i : $\sum_{k=1}^i \frac{a_k}{b_k} \geq$

$i \sqrt{\frac{a_1 \dots a_i}{b_1 \dots b_i}} \geq i$ (Так как по условию выражение под корнем ≥ 1 , то эта сумма

$\geq i$, а, значит, $S_i \geq 0$, откуда и следует нужное нам неравенство:

$\sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}) + S_n b_n \geq 0$ (т. к. $b_i \geq b_{i+1}$).

Транснеравенство Перестановки

Прежде чем переходить к транснеравенству, нужно определить, что такое перестановка. Перестановкой n -элементного множества мы будем называть функцию σ , которая определена на натуральных числах от 1 до n и возвращает натуральное значение от 1 до n . Кроме того, она должна быть биективной, то есть для любого натурального числа b от 1 до n существует единственное натуральное a от 1 до n такое, что $\sigma(a) = b$.

$$\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\forall b \in \{1, 2, \dots, n\} \exists! a \in \{1, 2, \dots, n\}: \sigma(a) = b$$

Множество всех таких перестановок будем обозначать S_n . Таким образом, если у нас есть набор чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то все его перестановки можно записать в следующем виде:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rightarrow \{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}\}, \sigma \in S_n.$$

Теперь мы можем переходить к транснеравенству.

Формулировка

Транснеравенство утверждает, что если у нас есть два возрастающих набора чисел, то выполнены следующие неравенства для любой перестановки σ :

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad a_1 \leq \dots \leq a_n, \quad b_1 \leq \dots \leq b_n, \quad \sigma \in S_n$$

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_{\sigma(1)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)} \geq a_1 b_n + \dots + a_n b_1.$$

Доказательство

Докажем первое неравенство. Для этого перенесём всё в левую часть, после чего применим преобразование Абеля:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - b_{\sigma(i)}) a_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - b_{\sigma(i)}) a_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) S_i, \quad S_i = (b_1 - b_{\sigma(1)}) + \dots + (b_i - b_{\sigma(i)}).$$

$$S_n = 0, \text{ потому что } \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n b_{\sigma(i)}.$$

$$a_1 \leq \dots \leq a_n \Rightarrow a_i - a_{i+1} \leq 0$$

$$b_1 \leq \dots \leq b_n \Rightarrow S_i \leq 0$$

$$\Rightarrow (a_i - a_{i+1}) S_i \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) S_i \geq 0$$

Ч.Т.Д.

Второе неравенство доказывается абсолютно аналогично.

Примеры использования в решении нестандартных неравенств

№1 [5]

Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (неравенство трёх квадратов).

Док-во:

Так как в этом неравенстве все буквы взаимозаменяемы, то, не умаляя общности, можно считать, что $a \geq b \geq c$. Запишем транснеравенство для наборов чисел $a \geq b \geq c$ и $a \geq b \geq c$:

$$a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c \geq a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a.$$

Ч.т.д.

№2 [17]

Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d верно неравенство:
 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot d + d^2 \cdot a$.

Док-во:

Так как мы не можем точно расположить переменные по неубыванию, предположим, что $a \leq b \leq c \leq d$. Так как в левой части переменные взаимозаменяемы, то можно доказать неравенство отдельно для каждого порядка переменных. Докажем для первого случая. Рассмотрим транснеравенство для наборов $\{a^2, b^2, c^2, d^2\}$ и $\{a, b, c, d\}$

($0 < a \leq b \leq c \leq d \Rightarrow 0 < a^2 \leq b^2 \leq c^2 \leq d^2$):

$$a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c + d^2 \cdot d \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot d + d^2 \cdot a.$$

Остальные случаи порядка a, b, c, d доказываются аналогично.

Ч.т.д.

№3 [18]

Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a+b+c}{abc}$.

Док-во:

Так неравенство симметрично, то н.у.о. $a \geq b \geq c$. Запишем

транснеравенство для наборов чисел $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ и $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c} &\geq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &\geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a + b + c}{abc}$$

Ч.т.д.

Неравенство Чебышёва для сумм

Формулировка

Пусть есть наборы чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, тогда выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right), \text{ то есть}$$
$$\frac{(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)}{n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n} \cdot \frac{(b_1 + \dots + b_n)}{n}.$$

Доказательство

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Запишем n транснеравенств, где каждая следующая перестановка будет “сдвинута” на 1 число:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1 \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \dots + a_n b_2 \\ &\vdots \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1} \end{aligned}$$

Теперь сложим эти неравенства:

$$n \cdot (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + \dots + a_n) \cdot (b_1 + \dots + b_n)$$

Делим на n^2 :

$$\frac{(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)}{n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n} \cdot \frac{(b_1 + \dots + b_n)}{n}$$

Ч.т.д.

Примеры использования в решении нестандартных неравенств

№1

Докажите, что если:

а) $a, b, c > 0$, то $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (неравенство Несбитта);

б) $a, b, c, d > 0$, то $\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$.

Док-во:

а) Не умаляя общности, $a \geq b \geq c$. Тогда $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$.

По неравенству Чебышёва для сумм для (a, b, c) и $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{(a+b+c)}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right)}{3}$$

Используя неравенство между средним гармоническим и арифметическим для $b + c$, $a + c$ и $a + b$:

$$\frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}}{3} \leq \frac{(b+c) + (a+c) + (a+b)}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}}{3} \leq \frac{2 \cdot (a+b+c)}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}}{3} \geq \frac{3}{2 \cdot (a+b+c)}$$

Подставим:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{3}{2 \cdot (a+b+c)} = \frac{1}{2} \cdot 3$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Ч.т.д.

б) Не умаляя общности, $a \geq b \geq c \geq d$. Тогда $\frac{1}{b+c+d} \geq \frac{1}{a+c+d} \geq \frac{1}{a+b+d} \geq \frac{1}{a+b+c}$.

По неравенству Чебышёва для сумм для (a, b, c, d) и $\left(\frac{1}{b+c+d}, \frac{1}{a+c+d}, \frac{1}{a+b+d}, \frac{1}{a+b+c}\right)$:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \right) \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c}\right)}{4}.$$

Используя неравенство между средним гармоническим и арифметическим для $b + c + d$, $a + c + d$, $a + b + d$ и $a + b + c$:

$$\frac{\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c}}{4} \leq$$

$$\leq \frac{(b+c+d) + (a+c+d) + (a+b+d) + (a+b+c)}{4}$$

$$\frac{\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c}}{4} \leq 3 \cdot \frac{(a+b+c+d)}{4}$$

$$\left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c} \right) \geq \frac{4}{3 \cdot (a+b+c+d)}$$

Подставим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \left(\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \right) &\geq \\
&\geq \frac{(a+b+c+d)}{4} \cdot \frac{4}{3 \cdot (a+b+c+d)} = \frac{1}{3} \cdot 4 \\
\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} &\geq \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Ч.т.д.

Заключение

В ходе проведенного исследования способов решения нестандартных неравенств была достигнута поставленная цель — систематизация знаний

и практических умений, необходимых для успешного решения задач, встречающихся на математических олимпиадах. Анализ различных типов неравенств позволил выявить их ключевые свойства и области применения, что, в свою очередь, обогатило наше понимание математических концепций.

Собранные примеры задач и предложенные методы решения продемонстрировали разнообразие подходов, которые могут быть использованы в зависимости от условия задачи.

Таким образом, данное исследование подчеркивает важность глубокого понимания методов решения неравенств в контексте олимпиадной математики. Оно служит не только теоретическим вкладом в изучение данной темы, но и практическим руководством для студентов и преподавателей. В условиях постоянно растущей конкуренции на олимпиадах и повышенных требований к математическим знаниям, подобные исследования становятся неотъемлемой частью подготовки будущих математиков.

Надеемся, что данная исследовательская работа вдохновит учащихся на дальнейшее изучение математики и поможет им достигнуть новых высот в олимпиадных соревнованиях. В конечном итоге, изучение и применение методов решения неравенств не только обогащает математическую культуру, но и формирует у учащихся уверенность в своих силах, что является важным аспектом их личностного и профессионального развития.

Литература

- [1] Борис Трушин “Неравенство Коши-Буняковского | Ботай со мной #049 | Борис Трушин |” (URL: <https://youtu.be/qfAAXxh6sRo?si=aPO4NVBF2AWzvtqo>, дата обращения: 03.09.2024, 22.10.2024, 02.11.2024)
- [2] Борис Трушин “Неравенство о средних | Ботай со мной #048 | Борис Трушин !” (URL: <https://youtu.be/9oSylfDrlj0?si=8IgQSoof3rMNaPOZ>, дата обращения: 05.09.2024, 23.10.2024, 01.11.2024)
- [3] WildMathing “#240. Неравенства Йенсена, о средних, Коши-Буняковского, Гёльдера” (URL: https://youtu.be/TfY3peS6OtE?si=EqdQ5D1ctk_hUKI9, дата обращения: 08.09.2024, 26.10.2024)
- [4] MathgiM “Неравенство Бернулли (Доказательство)” (URL: <https://youtu.be/45J0JHP9mlA?si=pWV3g-4tL9sOaC5E>, дата обращения: 15.10.2024, 02.11.2024)
- [5] ФИЗМАТОВЕЦ “Неравенства №7. Преобразование Абеля и транснеравенство, неравенство Чебышёва.” (URL: https://youtu.be/eY5muZhxsMw?si=FLllyWG_DTmL3SN, дата обращения: 14.09.2024, 19.10.2024, 01.11.2024)
- [6] ФИЗМАТОВЕЦ “Неравенства №9. Практика (транснеравенство / неравенство Мюрхеда)” (URL: <https://youtu.be/1DzF8OQ4vMA?si=nLn2MbsbiOG7aAD5>, дата обращения: 21.10.2024, 01.11.2024)
- [7] Честная математика “Неравенство Чебышёва для сумм” (URL: <https://youtu.be/MtPNsy3iGmA?si=cD6D4uqcfo-LVRDo>, дата обращения: 26.10.2024, 02.11.2024)
- [8] И.В. Яковлев “Доказательство неравенств” (Материалы по математике, MathUs.ru) (URL: <https://mathus.ru/math/doner.pdf>, дата обращения: 10.08.2024, 08.09.2024, 13.10.2024, 01.11.2024)
- [9] Е.В. Паркевич “Неравенство Коши-Буняковского” (Методическое пособие по подготовке к олимпиадам, МФТИ) (URL: https://yagubov.ru/_ld/38/3831_.3831Z-min.pdf, дата обращения: 30.09.2024)

- [10] “Неравенство Коши-Буняковского-Шварца” (СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова — школа им. А.Н. Колмогорова; 2014-2015, Олимпиадная математика: Убегающие, 13 февраля 2015) (URL: <https://math.mosolymp.ru/upload/files/2015/aesc/outrunning-2015-02-13-inequality-cauchy-and-more.pdf>, дата обращения: 11.10.2024)
- [11] М. Шабунин «Математика для поступающих в вузы», стр. 250, 272, 291.
- [12] «Сборник задач по математике для поступающих во втузы» (под редакцией Сканави), стр.181-186.
- [13] «Всероссийская олимпиада школьников по математике 1993-2009 – Задачи и решения», стр.125-128.
- [14] «Сборник методических материалов письменных испытаний по математике и физике абитуриентов Московского Физтеха, 1947-2006 гг.», стр. 191, 249, 255.
- [15] Алгебраические неравенства и системы неравенств (URL: https://problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=153, дата обращения: 30.09.2024, 25.10.2024, 30.10.2024, 03.01.2025, 02.02.2025)
- [16] Неравенства 2
(URL: https://math.mosolymp.ru/upload/files/2016/khamovniki/9_2/2015_22_10_neravenstva_2.pdf, дата обращения: 30.09.2024, 22.10.2024)
- [17] Школково. Классические неравенства. Транснеравенство. Задача #94376. (URL: <https://3.shkolkovo.online/catalog/7250/94376?SubjectId=7>, дата обращения: 02.02.2025)
- [18] Транснеравенство [ЦПМ, кружок по математике, 8 класс, группа 8-2, 14 марта 2020 года] (URL: <https://math.mosolymp.ru/upload/files/2020/khamovniki/8/2020-03-14-trner-easy.pdf>, дата обращения: 06.02.2025)

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

Шифр

МБ-2

Предмет математика

ФИО участника (полностью) Тукан Пётр Васильевич

Дата рождения (дд.мм.гггг) 05.12.2008

Город Мытищи Область Московская

Образовательное учреждение МБОУ СОШ №6

Класс 10Ф

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

Шифр

116-2

| Задача №1 | Задача №2 | Задача №3 | Задача №4 | Задача №5 | Итоговый балл | Подписи членов комиссии |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|-------------------------|
| 20 | 0 | 20 | 20 | 20 | 80 | |

№1.

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

$$y = -1$$

$$2x^2 - 5x + 1 = -1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$l_1 = |x_1 - x_2| = |2 - \frac{1}{2}| = \frac{3}{2}$$

$$y = 4$$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$l_2 = |x_1 - x_2| = |3 + \frac{1}{2}| = \frac{7}{2}$$

$$y = a$$

$$2x^2 - 5x + 1 = a$$

$$2x^2 - 5x - (a-1) = 0$$

$$D = 25 + 8(a-1) = 8a + 17$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{8a+17}}{4}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{8a+17}}{4}$$

$$l_3 = |x_1 - x_2| = \left| \frac{5 + \sqrt{8a+17}}{4} - \frac{5 - \sqrt{8a+17}}{4} \right| = \frac{\sqrt{8a+17}}{2}$$

$$1) l_1^2 + l_2^2 = l_3^2$$

$$\frac{9}{4} + \frac{49}{4} = \frac{8a+17}{4}$$

$$9 + 49 = 8a + 17$$

$$8a = 58 - 17$$

$$8a = 41$$

$$a = \frac{41}{8}$$

$$2) l_1^2 + l_3^2 = l_2^2$$

$$\frac{9}{4} + \frac{8a+17}{4} = \frac{49}{4}$$

$$8a + 17 = 40$$

$$8a = 23$$

$$a = \frac{23}{8}$$

$$3) l_2^2 + l_3^2 = l_1^2$$

невозможна
т.к. $l_1 < l_2$



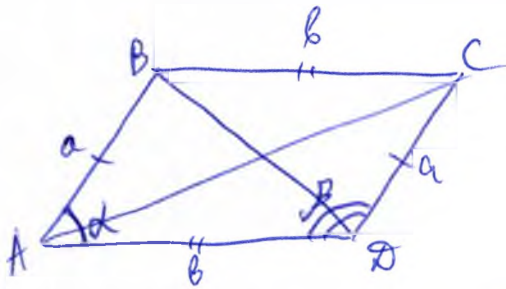
Ответ: $a = \frac{41}{8}; \frac{23}{8}$

Стр. 1

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

N 3



$$AC = 22$$

$$BD = 13$$

$$\angle BAP = \arcsin \frac{20}{29}$$

$$S_{ABCD} = ?$$

Пусть $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAP = \angle DCP = \alpha$,
 $\angle ABP = \angle CDP = \beta$.

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \sin \beta = \frac{20}{29}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{20^2}{29^2}} = \sqrt{\frac{29^2 - 20^2}{29^2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{29^2}} = \frac{3 \cdot 7}{29} = \frac{21}{29}$$

$$\cos \beta = -\frac{21}{29}$$

По т. косинусов для $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$:

$$13^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{21}{29} \quad (1)$$

$$22^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{21}{29} \quad (2)$$

$$(2) - (1):$$

$$22^2 - 13^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{21}{29} - a^2 - b^2 + 2ab \cdot \frac{21}{29}$$

$$38 \cdot 38 = 4ab \cdot \frac{21}{29}$$

$$ab = \frac{29 \cdot 15}{4}$$

$$S_{ABCD} = ab \sin \alpha = \frac{29 \cdot 15}{4} \cdot \frac{20}{29} = \boxed{75}$$

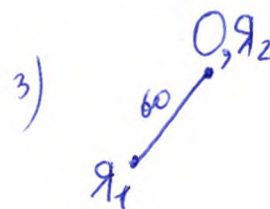
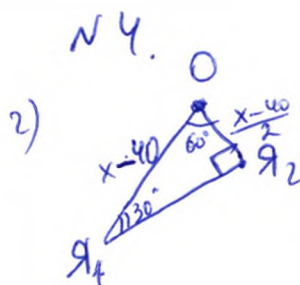
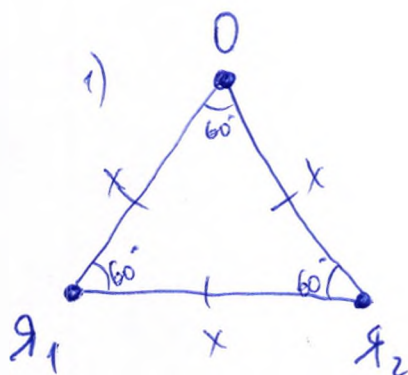
Ответ: 75.

~~Handwritten calculations showing a complex derivation of the area formula, including the final result $52^2 a^2 = 16a^4 + (29 \cdot 15)^2$.~~

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

$x = ?$



Заметим, что $\angle Я_1 O Я_2 = 60^\circ$ всегда. Тогда во втором случае именно $\angle Я_1 Я_2 O = 90^\circ$ (т.к. по условию ~~Я1Я2~~ Яхта 2 быстрее Яхты 1, то ~~Я1Я2~~ $OЯ_1 > OЯ_2 \Rightarrow$ гипотенуза именно $OЯ_1$). Т.к. $\angle Я_1 O Я_2 = 60^\circ$, $\angle OЯ_2 Я_1 = 90^\circ$, то $\angle OЯ_1 Я_2 = 30^\circ \Rightarrow \frac{OЯ_2}{OЯ_1} = \frac{1}{2}$

$OЯ_1 = x - 40 \Rightarrow OЯ_2 = \frac{x - 40}{2}$. Пусть скорости яхт v_1 и v_2 .

Тогда: $\Delta t_{12} = \frac{x - 40}{v_1} - \frac{x - 40/2}{v_2} = \frac{x + 40}{2v_2}$

$\left(\begin{array}{l} 40 + (x - 40) = x \\ \frac{x - 40}{2} + \frac{x + 40}{2} = x \end{array} \right) \quad \Delta t_{23} = \frac{x - 60}{v_1} = \frac{x}{v_2}$

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{80}{x + 40} = \frac{x - 60}{x}$ ✓

$80x = (x + 40)(x - 60)$

$80x = x^2 - 20x - 2400$

$x^2 - 100x - 2400 = 0$

$D = 10000 + 9600 = 19600 = 140^2$

$x_1 = \frac{100 + 140}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ (км)}$

$x_2 = \frac{100 - 140}{2} = \frac{-40}{2} = -20 < 0 \text{ (не подх.)}$

Ответ: 120 км



Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

N5.

$$[1; 30] ; [31; 60] ; [61; 90] ; [91; 120]$$

но 6 чисел,
 $a_i = a_j \cdot 30$

$S_{\text{общ max}} = ?$

Для того, чтобы ~~в~~ разное никаких двух

чисел не делилась на 30, ~~нужно~~ все числа должны
~~иметь~~ иметь разные остатки по модулю 30 (такое возможно,
т.к. $6 \cdot 4 = 24 < 30$). Заметим, что не важно, в каком проме-
жутке окажется число с тем или иным остатком по модулю
30, * нам нужно, чтобы максимизировать сумму чисел,
максимизировать сумму всех $r_1 \neq r_2 \neq \dots \neq r_{23} \neq r_{24}$ остатков
по модулю 30. ~~нужно~~ А сумма этих остатков максимальна
при $r_1 = 6 ; r_2 = 7 ; r_3 = 8 ; \dots ; r_{23} = 28 ; r_{24} = 29$ (т.к.
~~они~~ они могут давать остатки от 0 до 29 при делении на 30).
Далее общая сумма ~~всех~~ всех 24 чисел будет равна:

$$S_{\text{общ max}} = (r_1 + r_2 + \dots + r_{24}) + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 30 + 6 \cdot 60 + 6 \cdot 90 =$$

$$= (6 + 7 + \dots + 29) + 6 (30 + 60 + 90) = \frac{6 + 29}{2} \cdot 24 + 6 \cdot 180 =$$

$$= 35 \cdot 12 + 6 \cdot 180 = 35 \cdot 12 + 90 \cdot 12 = 12 \cdot 125 = 1500 =$$

$$= \boxed{1500}$$

Ответ: 1500

(20)

Нужно, чтобы
максимальной оказалась
не сумма остатков, а сумма
чисел. Если остаток = 0,
то число = 30.

$$\cancel{6} + 7 + \dots + 11 + 12 + \dots + 17 + 18 + \dots + 23 + 24 + \dots + 29$$

30

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

~~N1~~ N2

$$3ax^2 - 5x + 2a = 0$$

$$2x^2 + ax - 3 = 0$$

$a_{\min} = ?$
одн. корни.

$$3ax^2 - 5x + 2a = 2x^2 + ax - 3$$

$$(3a-2)x^2 - (a+5)x + (2a+3) = 0$$

$$D = (a+5)^2 - 4(3a-2)(2a+3) = a^2 + 10a + 25 - 4(6a^2 + 5a - 6) =$$

$$= a^2 + 10a + 25 - 24a^2 - 20a + 24 = -23a^2 - 10a + 49 \geq 0$$

$$23a^2 + 10a - 49 \leq 0$$

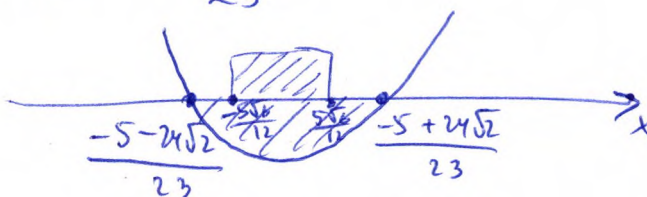
$$D = 100 + 23 \cdot 49 \cdot 4 = 100 + 4508 = 4608 = (48\sqrt{2})^2$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 23 \\ \hline 147 \\ + 980 \\ \hline 1127 \\ \times 4 \\ \hline 4508 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4608 & 2 \\ 2304 & 2 \\ 1152 & 2 \\ 576 & 24 \\ 24 & 24 \\ 1 & \end{array}$$

$$a_1 = \frac{-10 + 48\sqrt{2}}{46} = \frac{24\sqrt{2} - 5}{23}$$

$$a_2 = \frac{-24\sqrt{2} - 5}{23}$$



$$3ax^2 - 5x + 2a = 0$$

$$D = 25 - 24a^2 \geq 0$$

$$\text{при } 0 \leq a^2 \leq \frac{25}{24}$$

$$a \in \left[-\frac{5}{\sqrt{24}}; \frac{5}{\sqrt{24}}\right]$$

$$a \in \left[-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right]$$

$$2x^2 + ax - 3 = 0$$

$$D = a^2 + 24 \geq 0 \text{ при любом } a$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} \approx -\frac{5}{2\sqrt{6,25}} = -\frac{5}{2 \cdot 2,5} = -\frac{5}{5} = -1$$

$$\frac{5}{2\sqrt{6}} \approx 1$$

~~$$a \in \left[-\frac{5-24\sqrt{2}}{23}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right]$$~~

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 1,4 \\ \hline 96 \\ + 240 \\ \hline 33,6 \end{array}$$

~~$$\begin{aligned} & \frac{-5-24\sqrt{2}}{23} \approx \frac{-5-24 \cdot 1,4}{23} = \frac{-5-33,6}{23} = \frac{-38,6}{23} \approx -1,68 \\ & \frac{-5+24\sqrt{2}}{23} \approx \frac{-5+24 \cdot 1,4}{23} = \frac{-5+33,6}{23} = \frac{28,6}{23} \approx 1,24 \end{aligned}$$~~

То есть $\left[-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right] \in \left[\frac{-5-24\sqrt{2}}{23}; \frac{-5+24\sqrt{2}}{23}\right]$ Стр. 5 $\Rightarrow a \in \left[-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right]$

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

~~Задача 1~~ Продолжение №2.

$$(3a-2)x^2 - (a+5)x + (2a+3) = 0$$

$$\Delta = -23a^2 - 10a + 49$$

$$x_{1,2} = \frac{a+5 \pm \sqrt{-23a^2 - 10a + 49}}{2(3a-2)}$$

$$x_1 = 0 \quad \text{или}$$

$$x_2 = 0$$

$$\frac{a+5 + \sqrt{-23a^2 - 10a + 49}}{2(3a-2)} = 0$$

$$\frac{a+5 - \sqrt{-23a^2 - 10a + 49}}{2(3a-2)} = 0$$

$$a \neq \frac{2}{3}$$

$$a \neq \frac{2}{3}$$

$$a+5 + \sqrt{-23a^2 - 10a + 49} = 0$$

$$a+5 - \sqrt{-23a^2 - 10a + 49} = 0$$

$$\sqrt{-23a^2 - 10a + 49} = -a-5$$

$$\sqrt{-23a^2 - 10a + 49} = a+5$$

$$-a-5 \geq 0$$

$$a+5 \geq 0$$

$$a \leq -5$$

$$a \geq -5$$

$$-23a^2 - 10a + 49 = a^2 + 10a + 25$$

$$-23a^2 - 10a + 49 = a^2 + 10a + 25$$

$$24a^2 + 20a - 24 = 0$$

$$24a^2 + 20a - 24 = 0$$

$$6a^2 + 5a - 6 = 0$$

$$6a^2 + 5a - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 4 \cdot 36 = 25 + 144 = 169$$

$$a_1 = \frac{2}{3} \text{ (не вх. по ОДЗ)}$$

$$a_1 = \frac{-5+13}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ (не вх. по ОДЗ)}$$

$$a_2 = \left[-\frac{3}{2} \right] \text{ (входит)}$$

$$a_2 = \frac{-5-13}{12} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} \text{ (не входит)}$$

$$-\frac{3}{2} < -\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$-\frac{18}{12} < -\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$18 > 5\sqrt{6}$$

$$3\sqrt{6} > 5$$

$$\sqrt{6} > 2 \Rightarrow 3\sqrt{6} > 6 > 5$$

$$\Rightarrow \emptyset. \quad -\frac{3}{2} < -\frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow \text{не входит в } \left[-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12} \right]$$

Ответ: \emptyset . (ни при каких a)