

ШИФР ЕА-50

(заполняется членом оргкомитета или тех.секретариата)

**Письменная работа****Межрегиональная олимпиада школьников  
«БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ»**по МАТЕМАТИКЕ в 11 классе  
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО МАРКОВ МАТВЕЙ АНДРЕЕВИЧ  
(полностью! в именительном падеже)

Дата рождения

Школа МАОУ ГИМНАЗИЯ 35район Кировский город ЕКАТЕРИНБУРГ**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)  
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.Дата проведения 19.01.2025**Правила поведения**

Участник олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано организаторами в аудитории;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ жюри обнаружит идентичный текст (или текст с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- иметь при себе любые средства мобильной связи, включая смартфон, микрофон, наушники, смарт-часы и пр.;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

**Оформление работы**

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной ручкой, одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета ручки следует обратиться за разрешением к организатору в аудитории).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

**Нельзя делать исправления карандашом.****С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен**\_\_\_\_\_  
с/у участника олимпиад



ШИФР ЕА-56

(заполняется сотрудником секретариата)

+ + + - -  
19 16 12 3 2

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	-	±
20	20	16	3	12

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

Заполняется проверяющим!

2 cos<sup>4</sup>x - sin<sup>4</sup>x = 1

cos<sup>2</sup>x = 1 - sin<sup>2</sup>x

2(1 - 2sin<sup>2</sup>x + sin<sup>4</sup>x) - sin<sup>4</sup>x = 1

cos<sup>4</sup>x = 1 - 2sin<sup>2</sup>x + sin<sup>4</sup>x

2 - 4sin<sup>2</sup>x + 2sin<sup>4</sup>x - sin<sup>4</sup>x = 1

Пусть sin x = t, t ≤ 1, тогда:

2 - 4t<sup>2</sup> + 2t<sup>4</sup> - t<sup>4</sup> = 1

2t<sup>4</sup> - t<sup>4</sup> - 4t<sup>2</sup> + 1 = 0

(t+1)(2t<sup>3</sup> - 3t<sup>2</sup> - t + 1) = 0

(t+1)(t - 1/2)(2t<sup>2</sup> - 2t - 2) = 0

2(t<sup>2</sup> - t - 1) = 0

D = 1 + 4 = 5

t<sub>1,2</sub> = (1 ± √5)/2

t = -1

t = 1/2

t = 0,5 - √5/2 - не подходит (≈ 1/2 - 1,118/2)

t = 0,5 + √5/2 - п.к., т.к. √5/2 > 1

0,5 + √5/2 > 1,5

Делаем обратную замену:

1) t = -1

sin x = -1

x = -π/2 + 2πk, k ∈ Z

2) t = 1/2

sin x = 1/2

x = π/6 + 2πk, k ∈ Z

x = 5π/6 + 2πk, k ∈ Z

3) t = (1 - √5)/2

sin x = (1 - √5)/2

x = arcsin((1 - √5)/2) + 2πk

x = π - arcsin((1 - √5)/2) + 2πk



Ответ:

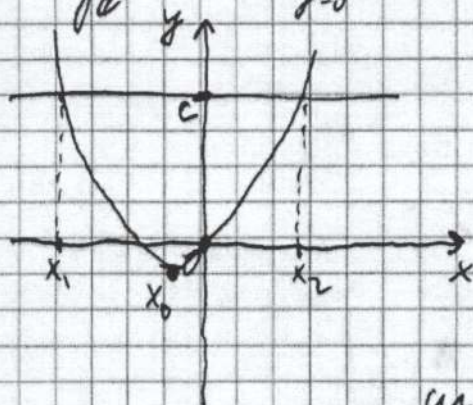
$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

(11.3)

$$ax^4 + bx = c$$

Переведем в равносильной системе и решим это уравнение с помощью системы координат "XOY", учитывая, что  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  — стороны  $\Delta$ .

$$\begin{cases} y = ax^4 + bx & (1) \text{ — нарисовать производную 1-ого.} \\ y = c - \text{или } y = 0 & (2) \end{cases}$$



$$y' = 4ax^3 + b$$

$$4ax^3 + b = 0$$

$$x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$$

$< 0$  — отсюда  
на графике  
линия  $y = 0$

$x_0$  — точка минимума

$$\text{из производной } y' = 4ax^3 + b \\ x \uparrow \Rightarrow y'$$

Заметим, что при  $x = 0$   $y = 0a + 0b = 0$ , отсюда  
это на графике. Значит  $x_0 < 0$ , так как  $y(x_0) < 0$ ,  
 $y(0) = 0$ ,  $x_0$  — точка минимума.

Значит  $x_1$  и  $x_2$  разных знаков ( $c > 0$ ,  $y(0) < 0$ )  
 $\forall x$  и  $\forall c$   $y$  (оба пересечения  $y = c$  и  $ax^4 + bx$ ,  
так как  $\Delta$  имеет один корень).



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

Для того, чтобы доказать, что модуль отрицательного корня больше модуля положительного, пусть  $x_2$  - положительный корень,  $x_1$  - отрицательный корень ( $|x_1| = x_2 + k$ , если  $k > 0$ , то модуль  $x_1$  больше  $x_2$  - это нам и нужно доказать).

$$ax^4 + bx = y$$

$$ax_2^4 + bx_2 = a(x_2 + k)^4 - b(x_2 + k)$$

при  $k=0$  условие не выполняется.

$$x_2^4 = (x_2 + k)^4, \text{ но } bx_2 > -b(x_2 + k)$$

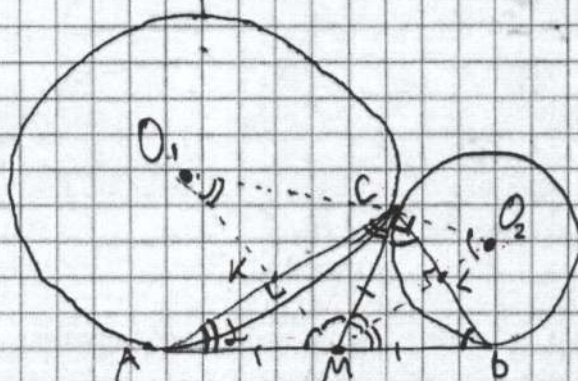
правая часть уравнения меньше, чем левая при  $k < 0$  правая часть сильно уменьшается.

$(x_2 + k)^4$  увеличивается при  $k > \Delta k$  при больших по модулю  $k < 0$   $(x_2 + k)^4$  будет большим числом.  
значит  $k > 0$ , в таком случае модуль отрицательного числа действительно больше положительного корня.

ЧИТА

НМЦ

Сделаем чертеж  
В кту  $\Delta$   $AM = MB = MC$





МС касательная к обеим окружностям из  
равенств соответствующих отрезков танген-  
сов, которые можно касаются окружностей.

✓ Значит  $O_1CO_2$  лежит на одной прямой  
 $MC \perp O_1O_2$

$$\angle A = \angle \text{ по условию}$$

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle$$

т.к.  $O_2$  - центр окружн М - м. пересечения кие, то

$$\begin{cases} \angle BMO_2 = \angle CMO_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \angle ACM \text{ в } \triangle = \angle \Rightarrow \angle MCB = 90^\circ + \end{cases}$$

⇓

$$\angle CMB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 2\angle) = 2\angle$$

$$\angle BMO_2 = \angle CMO_2 = \angle$$

$CB \perp O_2M$ , т.к.  $\angle CLM = 90^\circ$  из  $\triangle CLM$

Пусть  $AM = x$ , тогда выразим площадь тре-  
угольн  $\triangle$  через  $\angle$  и  $x$

$$ML = x \cdot \cos \angle \quad (\text{из } \triangle CLM)$$

$$\triangle CLM \sim \triangle CMO_2 \text{ - н/у (по углам)}$$

$k$  - коэффициент подобия  $k = \frac{CM}{ML} = \frac{x}{x \cdot \cos \angle} = \frac{1}{\cos \angle}$

$$\frac{S_{CMO_2}}{S_{CLM}} = 2 \cdot k^2 = \frac{2}{\cos^2 \angle}$$

$$\frac{S_{CMB}}{S_{CLM}} = 2!$$

Аналогично для  $\triangle CMK \approx \triangle AMK \approx \triangle MO_1C$

$\triangle O_1O_2M$  - н/у & ( $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$ ) откуда?

$$\textcircled{a} S_{O_1O_2M} = \frac{1}{2} O_1M \cdot O_2M$$



Фамилию, имя, отчество **НЕ** писать! Лист **НЕ** подписывать!

$$O_1 M = \frac{x}{\cos \angle}$$

$$O_1 M = \frac{x}{\sin \angle}$$

откуда?

$$S_{O_1 M} = \frac{x^2}{2 \cos \angle \sin \angle} = \frac{x^2}{\sin 2\angle}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

$$AC = 2x \cdot \cos \angle$$

$$BC = 2x \sin \angle$$

$$S_{ABC} = 2x^2 \sin \angle \cos \angle$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{O_1 M}} = 2x^2 \sin \angle \cos \angle \cdot \frac{\sin 2\angle}{x^2} = \sin^2 2\angle \quad +$$

+

(N 11.4)

в) при  $x=1$  уравнение не выполняется  
 $9 \cdot 1 \neq 1$  при  $x=0$ , тоже не выполн  
 $9 \cdot 1 \neq 1$

для  $x > 0$

$$\log_x 9 + \log_x x^{6x} = \log_x 1$$

$$2 \log_x 3 + 6x = 0$$

$$\log_x 9 \cdot x^{6x} = 1$$

$$9 \cdot x^{6x} = 1$$

$$x^{6x} = \frac{1}{9}$$

$x = \frac{1}{3}$  — 1 корень (рациональный)

и все?

38



8) где  $x < 0$

~~$x^{6x}$  рационального и  $x$  рационального~~

$$9 \cdot x^{6x} = 1$$

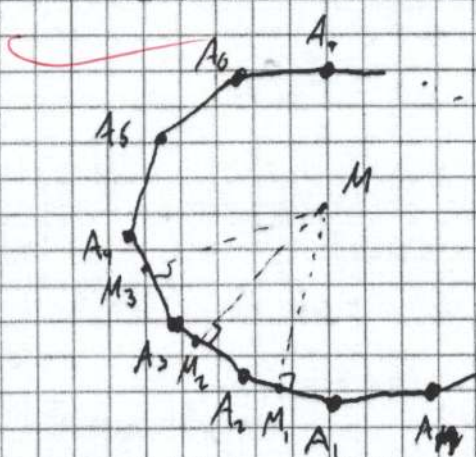
$$9 \cdot \frac{1}{x^{-6x}} = 1$$

$$\frac{1}{x^{-6x}} = \frac{1}{9}$$

$$x^{-6x} = 9$$

Решение

$x = -\frac{1}{3}$  — есть отрицательный корень —  
N 11.5



$$\text{Корень } \left(-\frac{1}{3}\right)^{-6 \cdot \frac{1}{3}} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{9}$$

Расстояние между  
соседними звеньями,  
то есть расстояние  
между точками вершин:  
 $(2A_1M)^2 = A_1A_2^2 + (2A_2M)^2 - A_1A_2^2$

Точка вершин, расстояние

вычисляется если  $M_i$  — середина  $A_i A_{i+1}$ , при  
этом  $A_i M_i$  — расстояние (вероятно)  
от  $M$  до вершины  $A_i A_{i+1}$ , если расстояние  
вычисляется, но и  $A_i M = A_{i+1} M$  (из равнобедренного  
треугольника  $M A_i A_{i+1}$ , в котором  $M M_i$  — высота

Проверено тригонометрическим  
способом



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

Является медианой и высотой по усло-  
вию. Если  $A_i A_{i+1}$  (и так для всех  $n$   
сторон), то вокруг этого  $n$ -угольника можно  
описать окружность с центром в точке  
 $M$  и радиусом  $MA_i$  - для любого  $i$  это рассто-  
яние одно и то же.

Данная окружность будет касаться на  
всех ~~поверх~~ вершинах данного  $n$ -угольника  
и не пересечет его сторон.

Читая, из равенства следует возможность  
описать окружность вокруг