



ШИФР

М-11-03

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа**Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ**по математике Дата проведения 19.01.2025
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО участника (полностью) Вялова Анна АлександровнаДата рождения _____ Класс 11Школа № 23 район Ленинградский город Калининград**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.**Правила поведения**

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по

письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен _____

(подпись участника олимпиады)

$\Sigma = 50$

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 1

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1 \quad (1)$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad (\text{по осн. тригг. тождеству})$$

$$\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x$$

$$2 \cdot \sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0 \rightarrow (1)$$

$$\sin^3 x \cdot (2\sin x - 1) + (1 - 2\sin x) \cdot (1 + 2\sin x) = 0$$

$$(2\sin x - 1) / (\sin^3 x - 2\sin x - 1) = 0$$

$$2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin^3 x - 2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x (\sin^2 x - 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x (\sin x - 1)(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$(\sin x + 1)(\sin^2 x - \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x + 1 = 0 \vee \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = t, |t| \leq 1 \quad (2)$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

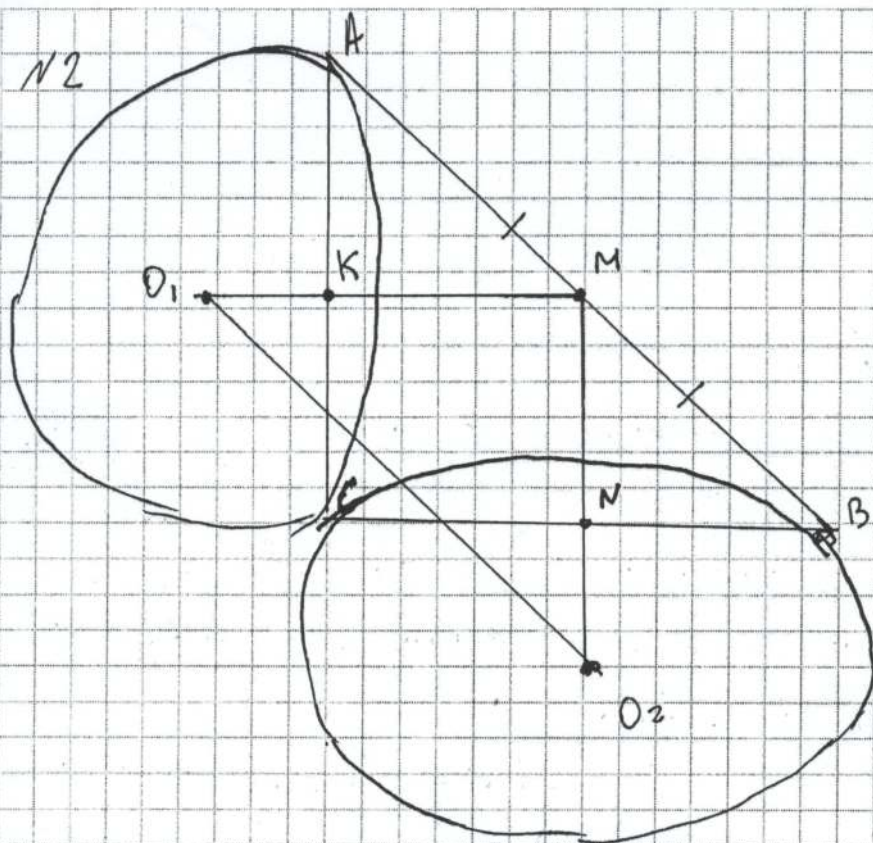
$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow \text{не подходит по н. (2)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x = (-1)^{m+1} \cdot \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; (-1)^{m+1} \cdot \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi m$$

| | | | | |
|----|---|----|----|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| + | + | + | + | 0 |
| 14 | 8 | 15 | 10 | 0 |



- 1) $\Pi. \kappa. O_1$ и O_2 - центр окр. $\Rightarrow O_1 \in$ середин. перпендикуляру KA
 $O_2 \in$ середин. перпенд. BC

$$O_1M \perp AC \text{ и } O_2M \perp BC$$

не боеставлено!
потому?

2) $\exists AC = a ; BC = b$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} \text{ (м.к. } \Delta \text{ н/у)}$$

$$S_{O_1MO_2} = \frac{O_1M \cdot O_2M}{2} \text{ (м.к. } \Delta \text{ н/у)} \rightarrow \text{когда}$$

$$\text{м.к. } MO_1 \perp AC ; MO_2 \perp BC ; AC \perp BC$$

$$\Downarrow$$

$$O_1M \perp MO_2$$

3) $O_1M = O_1K + KM$

$$KM = \frac{b}{2} \text{ (как ср. линия)}$$

$$O_1K = \frac{a \cdot \operatorname{ctg} \angle}{2} \Rightarrow O_1M = \frac{a \cdot \operatorname{ctg} \angle}{2} + b$$

Аналогично $O_2M = \frac{b \cdot \operatorname{ctg} \angle}{2} + a$ (как $\angle MN$ и O_2M)

аналогично чему?

4) Подставим и получим:

$$S_{O_1MO_2} = \frac{\frac{a \cdot ctg \alpha + b}{2} \cdot \frac{(b \cdot tg \alpha + a)}{2}}{2} = \frac{2ab + a^2 ctg \alpha + b^2}{8}$$

$$= \frac{2ab + a^2 ctg \alpha + b^2 tg \alpha}{8} \quad (\text{по умн. чисел. подобию})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{O_1MO_2}}{S_{ABC}} = \frac{2 + \frac{a}{b} ctg \alpha + \frac{b}{a} tg \alpha}{4}$$

из того, что $b = a \cdot tg \alpha$

$$\Rightarrow \frac{S_{O_1MO_2}}{S_{ABC}} = \frac{2 + ctg^2 \alpha + tg^2 \alpha}{4} = \frac{(tg \alpha + ctg \alpha)^2}{4}$$

Ответ: $\frac{(tg \alpha + ctg \alpha)^2}{4}$

№3

1) П.р. a, b, c - стороны $\Delta \Rightarrow a, b, c > 0$

\Rightarrow выполн. нер-во Δ : $\begin{cases} b+c > a \\ a+c > b \\ a+b > c \end{cases}$

2) Имеем: $ax^4 + bx - c = 0$

$$\Rightarrow ax^4 = -bx + c$$

$$f(x) = ax^4$$

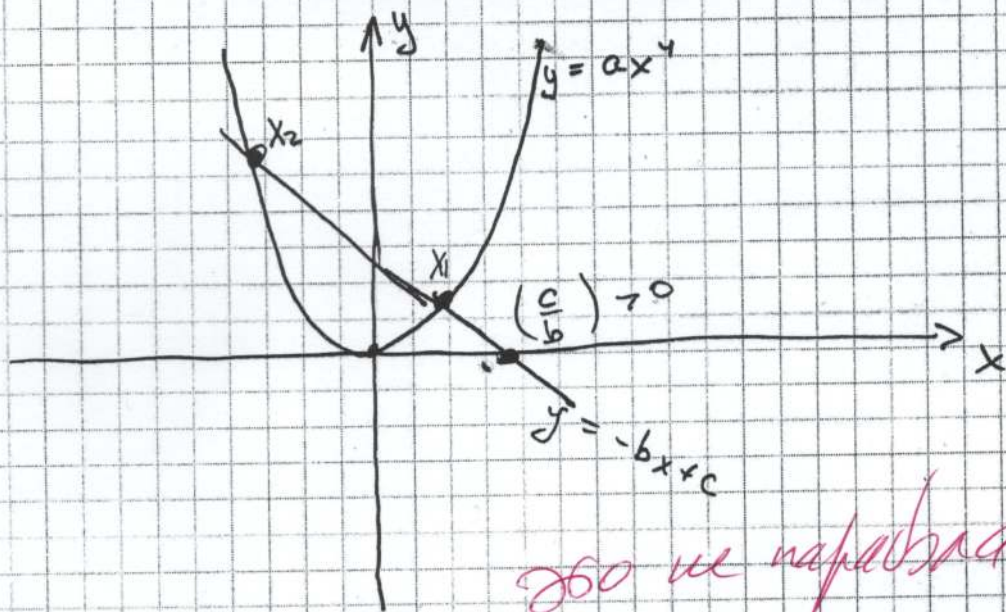
$$g(x) = -bx + c$$

1) график $f(x)$ - парабола ветви напр. вверх $a > 0$

2) график $g(x)$ - прямая убывающая (т.к. $-b < 0$)

Зн. соотв. $\forall c$ ось Ox в положительной х с коорд $(\frac{c}{b}, 0)$.

Нарисуем график:



это не параболы

видим, что пр. \in параболу \Rightarrow 2-корня
имеем.:

Докажем, что $|x_1| < |x_2|$

из пер-ва $\Delta a+b > c$

$$x_1 > 0: c = ax_1^4 + bx_1 < a+b$$

$$\underbrace{x_1}_{>0} \cdot \underbrace{(ax_1^3 + b)}_{>0} < a+b \Rightarrow |x_1| < \frac{a+b}{ax_1^3 + b} < 1$$

$x_2 < 0$ Аналогично:

$$\underbrace{x_2}_{<0} (a \cdot \underbrace{x_2^3}_{<0} + b) < a+b \Rightarrow |x_2| > \frac{a+b}{a \cdot x_2^3 + b} > 1$$

$$\Rightarrow |x_1| < 1 < |x_2|$$

н4

Рассмотрим функцию:

$$g(x) = x^6 - 1$$

у вас же это знак
для отрицательных

(+1/2)

ср.4

$$y' = 9 \cdot x^{6x} \cdot 6(\ln x + 1) = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$$y(x) \searrow [0, e^{-1})$$

$$y(x) \nearrow [e^{-1}, +\infty)$$

$$y(e^{-1}) = \frac{9}{e^{6e^{-1}}} - 1 = \left(\frac{3}{e^{3e^{-1}}} + 1 \right) \left(\frac{3}{e^{3e^{-1}}} - 1 \right) =$$

$$= \left(\frac{3}{e^{3/e}} + 1 \right) \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2e}}} + 1 \right) \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{4e}}} + 1 \right) \dots \dots (1)$$

Тогда $\frac{3^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{4e}}} + 1 = 0 \rightarrow$ или в нашем

уравнении имеет 2 корня: +

В) из (1) заметим, что любой из чисел произведение положительных? а \Rightarrow данное уравнение не будет иметь отриц. корней.

и то, что

$$\sqrt{5} \quad \text{из} \quad 4(A_1 M_1^2 + A_2 M_2^2 + \dots + A_n A_n^2) =$$

$$= A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + \dots + A_n A_1^2$$

следует, что n - угловых, которых n вер. гранью

имеют четное кол-во углов, так и т.к. самих таких граней получается четное кол-во \Rightarrow

\Rightarrow все можно описать всего n угловых окружностей.