



ШИФР КГЗУ/М-11/А
(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 01.10.2025
(наименование общеобразовательного предмета)

ФИО участника (полностью) Демисов Александр Демисов

Дата рождения _____

Класс _____

Школа № Школа № 1 район Зеленодольский город Зеленодольск
М. К. Г. З. У. по А. К. Г. З. У.

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Все виды шпательных изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рванные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

_____ (подпись участника олимпиады)

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпательки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	-	+	-	0
20	4	20	3	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

Задание 1.

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$-4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x + 1 = 0$$

$$\sin x = a$$

$$-4a^2 + 2a^4 - a^3 + 1 = 0$$

$$(2a^3 - 3a^2 - a + 1)(a + 1) = 0$$

$$(1 - 2a)(-a^2 + a + 1) = 2a^3 - 3a^2 - a + 1$$

$$(1 - 2a)(-a^2 + a + 1) = -a^2 + a + 1 + 2a^3 - 2a^2 - 2a = 2a^3 - 3a^2 - a + 1$$

Умножим:

$$(1 - 2a)(-a^2 + a + 1)(a + 1) = a$$

$$1) 1 - 2a = 0$$

$$a = 0, \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) a + 1 = 0$$

$$a = -1 = \sin x$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

$$3) -a^2 - a + 1 = 0$$

$$D = 5$$

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1; \sin x \in [-1; 1]$$

a_1 — не подходит.

$$a_2 = \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

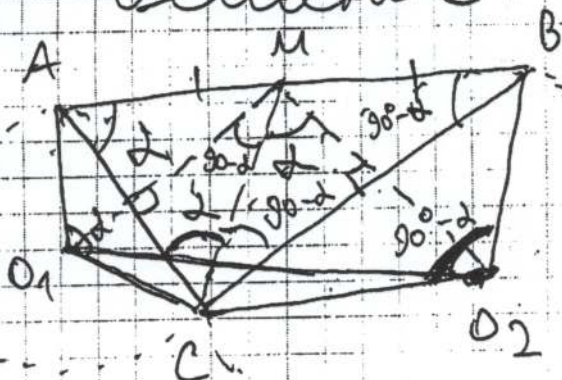


$$x = \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 11. 2

Решение:

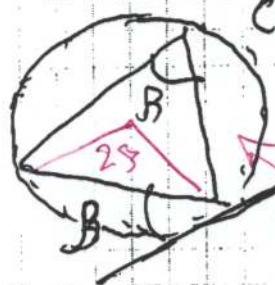


По свойствам касательной

$\angle CAB = \angle CO_1A$, аналогично. *используй кас!*

$$\angle CO_2B = \angle CBA = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle CAB = \angle CO_1A = \alpha$$



CB - во кас. *должен быть угловым*

Обозначим

$$O_1A = r; O_2C = O_2B = R$$

Если окружности с центрами

O_1 и O_2 касаются AB, то они касаются этой прямой соответственно в M. A и B. $\Rightarrow \angle O_1AB = 90^\circ = \angle O_2BA$

Найдём AC по теореме косинусов

$$AC^2 = r^2 + r^2 - 2 \cos \alpha \cdot r^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \alpha$$

$$CB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (90^\circ - \alpha)$$

$$AB = 2a$$

$$4a^2 = 2R^2 - 2R^2 \sin \alpha + 2r^2 - 2r^2 \cos \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(2R^2 - 2R^2 \sin \alpha)(2r^2 - 2r^2 \cos \alpha)}}{2}$$

$$= AC \cdot CB$$

3

$$O_1 O_2 = R + r \text{ - правильно?}$$

$$O_1 M = r^2 +$$

Проведем медиану CM

$$CM = AM = MB = a$$

CM перпендикулярно AM тогда
касательная к окружности с
ц. в O_1 правильно?



$$\angle MAC = \angle MCA = \angle$$

$$\triangle A O_1 M \text{ и } \triangle AMC - \text{к/д } \triangle$$



$O_1 M$ - общая биссектриса правильно?

$$\angle O_1 M C = 90^\circ - \angle$$

Аналогично с $\triangle CO_2 B$ и $\triangle CMB$

Они равнобедренные и

$O_2 M$ - общая биссектриса



$$\angle CMO_2 = \angle$$

4

Продолжение 11.2.

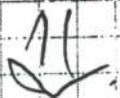
$$\angle O_1 M O_2 = 90^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMC} + S_{\triangle CMB}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) \cdot a^2$$

$$S_{\triangle CMB} = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \cdot a^2$$

$$O_1 A \parallel O_2 B$$



$$O_1 O_2 = 2a$$

$\triangle O_1 O_2 M$ и $\triangle ABC$ имеют

линейную равную $2a$ и оба являются прямоугольными, значит соотношение их площадей можно найти через углы.

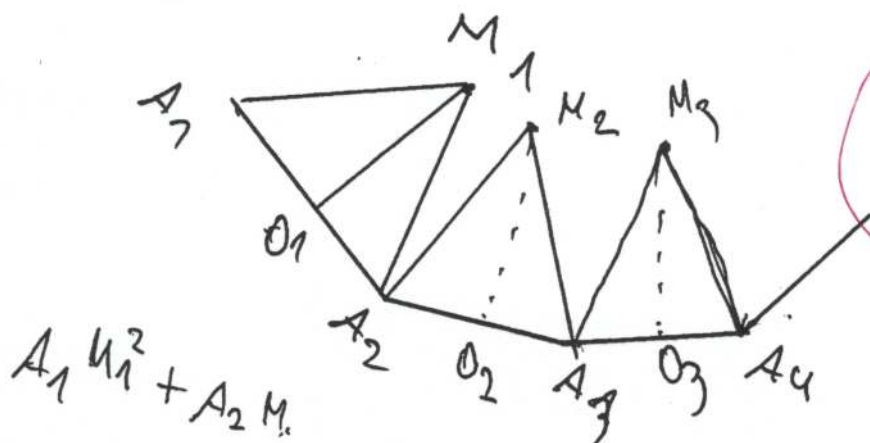
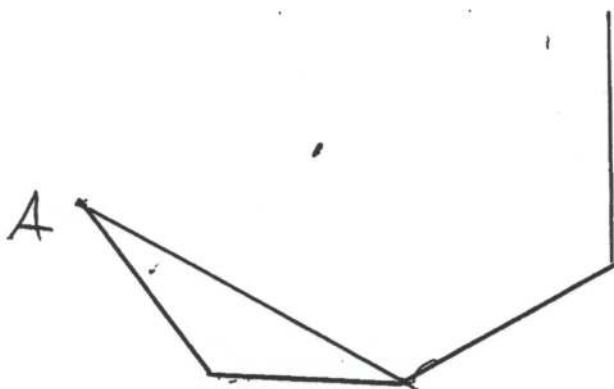
$$O_1 A \perp AB', O_2 B \perp AB$$

$O_1 A \parallel O_2 B$, так как

$O_1 O_2 \parallel AB$, значит $O_1 A B O_2$ —
прямоугольник где $O_2 B = O_1 A$, а
также возможно, если $\triangle ABC$ — $\mu/\phi\Delta$

M 11.5

Demondre



$$y \left(O_1 M_1^2 + \frac{1}{2} A_1 A_2^2 + \dots + O_n M_n^2 + \frac{1}{4} A_n M_{n+1} \right) =$$



Задача 1.1.3

$$ax^4 + bx = c$$

$$a + b > c$$

$$b + c > a$$

$$a + c > b$$

$$x(ax^3 + b) = c$$

$$ax^3 + b = \frac{c}{x}$$

~~Решение~~

1) Если $x > 1$, то какой-то, т.к. $a + b > c$, $ax^3 > a$; $\frac{c}{x} < c$, где $x > 1$

Поэтому ~~так~~ $ax^3 > a$; $\frac{c}{x} < c$

$$\Downarrow$$

$$ax^3 + b \neq \frac{c}{x} \text{ при } x > 1$$

2) $x = 1$ — obviously не может
 $a + b > c$

3) $0 < x < 1$

$$\Downarrow$$

$$ax^3 < a; \frac{c}{x} > c$$

На этом промежутке, будет ровно один корень, так как

Если мы рассмотрим функцию $y = ax^3 + 6$ она возрастает всегда, и представим свой график изогнутой параболой на промежутке $x \in (0; 1)$ $y \uparrow \Rightarrow$ только одна точка пересечения с $y = \frac{c}{x}$;



4) $x \rightarrow 0$



$c=0$ - а такого быть не может

интервала отрезка только в I четверти т.к. $x \in (0; 1)$

5) $-1 < x < 0$; $a+6 > c$



$ax^3 + 6 = \frac{c}{x}$

$ax^3 < a$; ~~и т.д.~~

$ax^3 = \frac{c}{x} = 6$

$|\frac{c}{x} - 6| > c+6$ *по модулю*

$|ax^3| < a$

Примем

$\frac{c}{x} - 6$ и ax^3 числа, меньше нуля

~~и т.д.~~

$6+c > a$

а так график с левой ветвью интервала. Почему так происходит (при пересечении) $x < 0$ (хотя он на графике)

$ax^3 \neq \frac{c}{x} - 6$

$ax^3 > \frac{c}{x} - 6$,

т.к

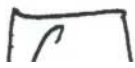
$\frac{c}{x} - 6 \leq -(6+c)$

$ax^3 \leq -a$,

$a - a > -6 - c$

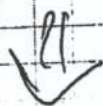
Но этот промежуток корней нет

6) $x = -1$; такого быть не может, т.к. $6+c > a$



Продолжение 11.3

$$4) \quad x < -1$$



$$\left| \frac{c}{x} \right| < c; |ax^3| > a$$

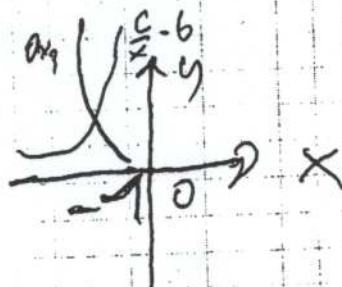
$$ax^3, \frac{c}{x} < 0$$

$$ax^3 + b = \frac{c}{x}$$

$$b - \frac{c}{x} = ax^3$$

$$b - \frac{c}{x} > 0; ax^3 > 0$$

$$x < -1$$



Будет всего одна точка пересечения, т.к. ax^3 — функция убывающая во второй четверти и существует только одна т.к. $x < -1$.
 $y = b - \frac{c}{x}$ — гиперболы, которая тоже отобразится во второй четверти, т.к. $x < -1$, иными $a, b, c > 0$ (стороны ABC)

Итого 1 корень на $0 < x < 1$, а второй корень на $-1 < x$

$$|x_2| > |x_1|, \text{ т.к. } x_2 < -1; a \text{ и } 0 < x_1 < 1$$

$$\Rightarrow |x_2| > |x_1|$$

7

a) $9 \cdot x^{6x} = 1$

$$x^{6x} = \frac{1}{9}$$

$$v_1 + v_2$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$1=1$

~~В) Есть ли у уравнения отрицательные корни?~~
~~Да, есть.~~
~~найдем $x = -\frac{1}{3}$~~

~~$$9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = 1$$~~

Ответ:
 а) $\frac{1}{3}$ б) нет

1) $x \geq 1$ — корней нет.

2) $0 < x < 1$

Один единственный корень $x = \frac{1}{3}$

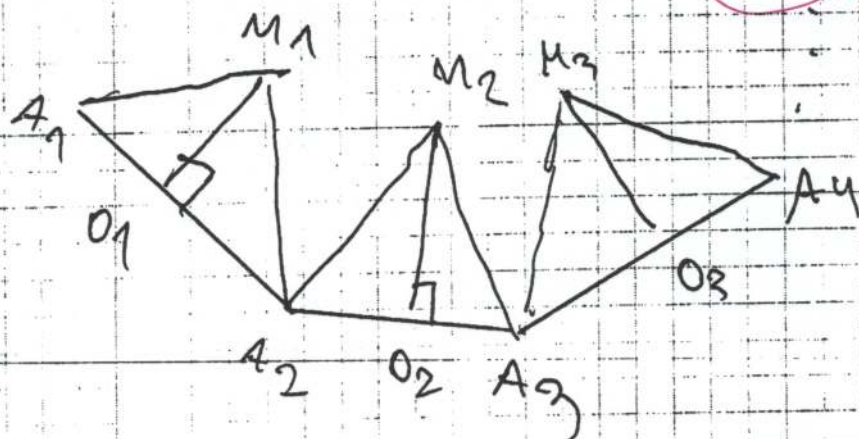
т.к. для $x \in (0; \frac{1}{3})$ $9 \cdot x^{6x} > 1$

и для $x \in (\frac{1}{3}; 1)$ $9 \cdot x^{6x} > 1$

б) отрицательные корни быть не может, т.к. если $-k < x < 0$, то $x^{6x} > 1$, аналогично с x^{6x} если $x < -1$, x^{6x} не принимает отрицательные значения.

См. 8 //

Задача 11.5



$M_1O_1, M_2O_2, \dots, M_nO_n$ — соответствующие проекции.

$$4(M_1O_1^2 + \frac{1}{4}A_1A_2^2 + M_2O_2^2 + \frac{1}{4}A_2A_3^2 + \dots + M_nO_n^2 + \frac{1}{4}A_nA_1^2) = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \dots + A_nA_1^2$$

$$4M_1O_1^2 + \dots + 4M_nO_n^2 = 0$$

Получаем, что проекции равны нулю, а значит все точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ — вершины правильного n -угольника с общей окружностью, а значит вершину n -угольника O можно считать: