



ШИФР КГЗУ / М-11 / 28 -
(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 19 января 2025
(наименование общеобразовательного предмета)

ФИО участника (полностью) Ковалев Арслав Сергеевич

Дата рождения _____ Класс 11

Школа № 6 район Бурдумшинский город Бурдумши

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рванные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

(подпись участника олимпиады)

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР КГЗУ/М-М) 25
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
<u>+</u>	<u>+1/2</u>	<u>±</u>	<u>7</u>	<u>0</u>
<u>20</u>	<u>10</u>	<u>12</u>	<u>8</u>	<u>0</u>

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

$$11.1) 2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 2 - 1 = 0$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

Пусть $\sin x = t, t \in [-1; 1]$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2} = 0$$

По теореме Безу:

$$\begin{array}{r|l} t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2} & t - \frac{1}{2} \\ t^4 - \frac{1}{2}t^3 & \\ \hline 0 - 2t^2 & \\ -2t^2 + t & \\ \hline -t + \frac{1}{2} & \\ -t + \frac{1}{2} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$t^4 - \frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2} = (t - \frac{1}{2})(t^3 - 2t - 1)$$

$$(t - \frac{1}{2})(t^3 - 2t - 1) = 0$$

Рассмотрим $t^3 - 2t - 1 = 0$

По теореме Безу:

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 2t - 1 & t + 1 \\ t^3 + t^2 & \\ \hline -t^2 - 2t & \\ -t^2 - t & \\ \hline -t - 1 & \\ -t - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Sigma = 50$

$$(t^3 - 2t - 1) = (t + 1)(t^2 - t - 1)$$

$$(t - \frac{1}{2})(t^3 - 2t - 1) = (t - \frac{1}{2})(t + 1)(t^2 - t - 1)$$

$$(t - \frac{1}{2})(t + 1)(t^2 - t - 1) = 0$$

Разложим $t^2 - t - 1 = 0$

$$a=1, b=-1, c=-1$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$(t^2 - t - 1) = (t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$$

$$(t - \frac{1}{2})(t + 1)(t^2 - t - 1) = (t - \frac{1}{2})(t + 1)(t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$$

$$(t - \frac{1}{2})(t + 1)(t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}) = 0$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \\ t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$t \in [-1; 1]$$

$$-1 \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq 1 + \sqrt{5} \leq 2$$

$$-3 \leq \sqrt{5} \leq 1$$

$$-\sqrt{9} \leq \sqrt{5} \leq \sqrt{1} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \notin [-1; 1]$$

$$-1 \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq 1 - \sqrt{5} \leq 2$$

$$-3 \leq -\sqrt{5} \leq 1$$

$$-\sqrt{9} \leq -\sqrt{5} \leq \sqrt{1} \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \in [-1; 1]$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Выпишем обратно замену:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1$$

$$\sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

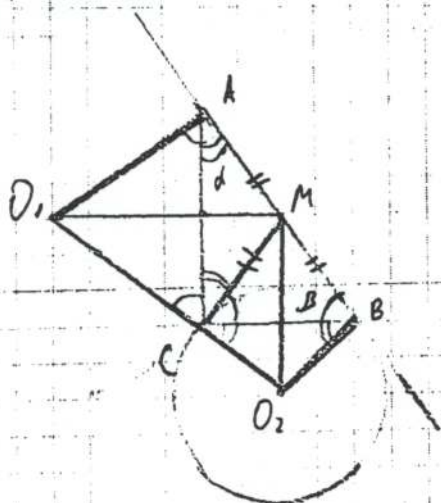
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



11.2.)



Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$

$\omega(O_1, R_1)$ $\omega(O_2, R_2)$

$\omega(O_1, R_1) \cap A$, $C \in \omega(O_1, R_1)$

AB - касательная к $\omega(O_1, R_1)$

$C \in \omega(O_2, R_2)$, $B \in \omega(O_2, R_2)$

AB - касательная к $\omega(O_2, R_2)$

M - середина AB

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{\omega O_2}}$

Решение:

Проведем CM, CM - медиана $\Rightarrow CM = AM = MB$

$\omega(O_1, R_1)$ касательна AB, $A \in \omega(O_1, R_1) \Rightarrow A$ - точка касания

$O_1A \perp AB$ ($O_1A = R_1$)

$\omega(O_2, R_2)$ касательна AB, $B \in \omega(O_2, R_2) \Rightarrow B$ - точка касания

$O_2B \perp AB$ ($O_2B = R_2$)

$C \in \omega(O_1, R_1)$; $C \in \omega(O_2, R_2) \Rightarrow O_1O_2 = O_1C + O_2C = R_1 + R_2$

Пусть $\angle B$ в $\triangle ABC$ равен β

$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle O_1AC = \beta$

$\angle O_2BC = \alpha$

В $\triangle O_1AC$ $O_1A = O_1C \Rightarrow \angle O_1AC = \angle O_1CA = \beta$

В $\triangle O_2BC$ $O_2B = O_2C \Rightarrow \angle O_2BC = \angle O_2CB = \alpha$

В $\triangle AMC$ $AM = MC \Rightarrow \angle CAM = \angle ACM = \alpha$

В $\triangle MBC$ $MB = MC \Rightarrow \angle MBC = \angle MCB = \beta$

$\triangle O_2CB \sim \triangle MAC$ по двум углам k_2 - коэф. подобия

$\triangle O_1AC \sim \triangle MBC$ по двум углам k_1 - коэф. подобия

$S_{ABC} = S_{AMC} + S_{CMB} = \frac{1}{2}(AC \cdot CB)$

$S_{\omega O_2} = \frac{1}{2}O_2O_1 \cdot CM = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \cdot CM$

не обязательно,
только если,
 O_1, O_2 и C
лежат на одной
прямой, это
нужно сначала
доказать!

$$\Delta O_1CB \sim \Delta MAC \Rightarrow \frac{MA}{O_1A} = \frac{MC}{O_1C} = \frac{AC}{BC} = k_1$$

$$\frac{AC}{BC} = k_1 \quad \frac{CB}{AC} = k_2 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{k_2} \Rightarrow$$

$$k_1 = \frac{O_1A}{MA} = \frac{O_1C}{MC} = \frac{AC}{BC} = \frac{MA}{O_2B} = \frac{MC}{O_2C} = \frac{AC}{BC}$$

$$? \quad k_2 = \frac{O_1A}{MA} = \frac{O_1C}{MC} = \frac{MA}{O_2B} = \frac{MC}{O_2C} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{k_1}!$$

$$\frac{O_1C}{MC} = \frac{MC}{O_2C}$$

$$MC^2 = O_1C \cdot O_2C = R_1 \cdot R_2$$

$$\frac{O_1A}{MA} = \frac{MA}{O_2B}$$

$$MA \cdot AB = O_1A \cdot AC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

$$S_{O_1MO_2} = \frac{1}{2} (R_1 + R_2) CM = \frac{1}{2} (R_1 + R_2) \sqrt{R_1 R_2}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{O_1C}{MC} = \frac{MC}{O_2C}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{O_1C}{MC}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{MC}{O_2C}$$

$$AC \cdot MC = BC \cdot O_1C$$

$$AC \cdot O_2C = BC \cdot MC$$

$$AC \cdot MC = BC \cdot R_1$$

$$AC \cdot R_2 = BC \cdot MC$$

$$AC = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BC^2} = BC \cdot R_1 \quad AC \cdot R_2 = BC \cdot \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$AC = 2BC \cdot R_1 \sqrt{AC^2 + BC^2} \quad R_2 = \frac{BC \sqrt{AC^2 + BC^2}}{2AC}$$

$$R_1 = \frac{2BC \sqrt{AC^2 + BC^2}}{AC}$$

$$R_1 = \frac{AC \sqrt{AC^2 + BC^2}}{2BC}$$

$$S_{O_1MO_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{AC \sqrt{AC^2 + BC^2}}{2BC} + \frac{BC \sqrt{AC^2 + BC^2}}{2AC} \right) \sqrt{\frac{AC \cdot BC \cdot (AC^2 + BC^2)}{4AC \cdot BC}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{AC^2 + BC^2} \cdot \left(\frac{AC}{2BC} + \frac{BC}{2AC} \right) \right) \sqrt{\frac{(AC^2 + BC^2)}{4AC \cdot BC}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{AC^2 + BC^2} \cdot \left(\frac{AC^2 + BC^2}{2AC \cdot BC} \right) \right) \cdot \frac{\sqrt{AC^2 + BC^2}}{2}$$

$$= \frac{(AC^2 + BC^2) \sqrt{AC^2 + BC^2}}{4AC \cdot BC} = \frac{AB^3}{4AC \cdot BC}$$

$$S_{\triangle OAC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

$$S_{\triangle OBC} = 0.5 AB \cdot BC$$

$$\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{AB \cdot BC \cdot \frac{AC}{AB \cdot BC} \cdot \frac{AC}{BC}}{AB \cdot BC \cdot \frac{AC}{AB \cdot BC} \cdot \frac{AC}{BC}} = \frac{4 AC^2 \cdot BC^2}{AB^2} = \frac{4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot AC^2}{1} = 4 AC^2 \sin^2 \alpha =$$

$$= 4 \cdot AM \cdot AB \cdot \sin^2 \alpha = 4 \cdot 1.5 AM \cdot \sin^2 \alpha = 6 AM \cdot \sin^2 \alpha$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle OBC}} = 6 AM \cdot \sin^2 \alpha$

AM = ?

+12

11.4. а) $9 \cdot x^{6x} = 1$

$$x^{6x} = \frac{1}{9}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3}$$

$$x^{6x} = \frac{1}{9}$$

$$(x^{3x})^2 = (\frac{1}{3})^2$$

$$6x \log_{\frac{1}{3}} x = 1$$

$$x^{3x} = \frac{1}{3}$$

$$3x \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3}$$

$$x \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{6}$$

$$3x \log_{\frac{1}{3}} x = 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{6}$$

$$x \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3}$$

$$x = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3}$$

$$x = 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x = 3^{-\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$x^{3x} = -\frac{1}{3}$$

$$x^{3x} = -\frac{1}{3}$$

$$3x \log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{3}$$

$$x \log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{9}$$

$$x \log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{9}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$x^{3x} = \frac{1}{3}$$

$$3x \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3}$$

$$x \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

7 (3)

почему не других корней?

Ответ: уравнение имеет 1 положительный корень равный $\frac{1}{3}$

б) $9x^{6x} = 1$

Если есть отрицательный корень, то $6x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 9x^{6x} = 1; \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x^{6x} = 1; \\ x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x^{6x} = 1; \\ x < 0 \end{cases}$$

$$6x \in \mathbb{Z}, 6x \in \mathbb{Z}, \quad x \geq \frac{1}{3}, x \leq -\frac{1}{3}, 6x \in \mathbb{Z} \quad x \leq -\frac{1}{3}, 6x \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 9x^{6x} = 1; \\ x \leq -\frac{1}{3}, 6x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x^{6x} = \frac{1}{9} \\ x \leq -\frac{1}{3}, 6x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} (x)^{-6x} = \frac{1}{9} \\ x \geq -\frac{1}{3}, 6x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x^{-6x} = \frac{1}{9}; \\ x \geq \frac{1}{3}, 6x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \\ x \geq \frac{1}{3}, \text{ б.р. - в.м.} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{9} \\ x \geq \frac{1}{3}, \text{ б.р. - в.м.} \end{cases} \quad \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} = 9; \\ x \geq \frac{1}{3}, \text{ б.р. - в.м.} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ x \geq \frac{1}{3}, \text{ б.р. - в.м.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^{\log_3 x} = 3 \\ x \geq \frac{1}{3}, \text{ б.р. - в.м.} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \log_3 x = 3 \\ x \geq \frac{1}{3}, \text{ б.р. - в.м.} \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 x^3 = 1; \\ x \geq \frac{1}{3}, \text{ б.р. - в.м.} \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = 3 \\ x \geq \frac{1}{3}, \text{ б.р. - в.м.} \end{cases}$$

...? +12(5)

11.3) $ax^3 + bx = c$

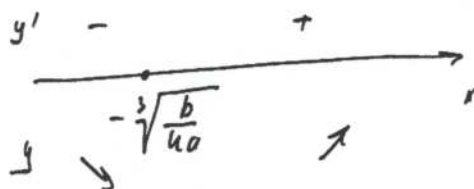
Рассмотрим $y = ax^3 + bx - c$

$y' = 3ax^2 + b$

$y' = 0 \quad 3ax^2 + b = 0$

$x^2 = -\frac{b}{3a}$

$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{3a}}$



$y = ax^3 + bx - c$ — кубическая

$y = ax^3 - bc - c \rightarrow$ не симметрична относительно оси Oy

Симметрична относительно оси $x = -\sqrt{-\frac{b}{3a}}$

Вывод
Рассмотрим от корней до оси $x = -\sqrt{-\frac{b}{3a}}$ один корень \Rightarrow
раз симметрична симметрична на $-\sqrt{-\frac{b}{3a}}$, то отриц. корни уравнения

$y = ax^3 + bx - c$ будет на $\sqrt{-\frac{b}{3a}}$ либо отриц. корни уравнения $y = ax^3 - c$ т.е. по модулю отриц. корни будут больше на $\sqrt{-\frac{b}{3a}}$

График $y = ax^3 + bx - c$ пересекает ось Oy в точке $-c$ т.е. в отриц. точке \Rightarrow при возрастании $y = ax^3 + bx - c$ график из области $y < 0$ перейдет $y > 0$ и пересечет ось в положительной координате (т.к. $y = ax^3 + bx - c$ симметричен относительно $x = -\sqrt{-\frac{b}{3a}}$, то оба корня не могут быть одного знака иначе свободный член был бы положительным)

11.5) Рассмотрим правильный n -угольник со стороной a

M -угольником будет серединой этого n -угольника

тогда стороны M будут делить a на $\frac{a}{2}$ (покажем)

Формула $\frac{1}{4}a^2$ $\frac{1}{4}((\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 + \dots) = a^2 + a^2 \dots$

$$\frac{1}{4}(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \dots) = a^2 + a^2 \dots$$

$$a^2 + a^2 + \dots = a^2 + a^2 + \dots$$

В этом случае будет верно то, что

центр правиль-го n -угольника можно считать

окружностью т.е для правильного делител при

верном равенстве