



ШИФР

КТЗУ / М-11 / 41

(заполняется представителем Оргкомитета)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКА Дата проведения 19.01.2025  
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО участника (полностью) Толстов Евгений СергеевичДата рождения \_\_\_\_\_ Класс 11Школа № Лицей №3 район Московский город г. Чебоксары

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)  
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил  
поведения и т.д.

*Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по  
письменному заявлению после истечения времени,  
предусмотренного на подачу и рассмотрение  
апелляций по данному предмету.*

#### Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист  
«Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для  
черновых записей, можно писать или синей, или  
фиолетовой, или черной пастой (чернилами),  
одинаковой во всей работе (при необходимости смены  
цвета пасты (чернил), следует обратиться за  
разрешением к представителю оргкомитета  
олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах,  
на которых имеются рисунки или записи, не  
относящиеся к выполняемому заданию, а также записи  
не на русском языке, и любые другие пометки,  
которые могут идентифицировать участника, на  
проверку не поступают и претензии по этим заданиям  
(задачам) не принимаются. На проверку не поступают  
также листы, подписанные участником, листы, на  
которых имеются записи карандашом (кроме  
рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и  
рванные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены  
карандашом, то при шифровке работы карандашные  
исправления будут стерты и на проверку поступит  
работа без исправлений.

#### Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

\_\_\_\_\_  
(подпись участника олимпиады)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	-	+	+12	0
20	4	16	10	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

$\Sigma = 50$

11.  $2\cos^4 x - \sin^4 x = 1$

Пусть  $\sin^2 x = q$ , тогда исходное будет  $2(1-q^2)^2 - q^2 = 1$

Т.е.  $2q^4 - q^2 - 4q^2 + 1 = 0$

Подставив  $q = -1$  получим  $0 = 0 \Rightarrow q = -1$  - корень.

Уравнение примет вид  $(q+1)(2q^3 - 3q^2 - q + 1) = 0$

Значит  $q = -1$

$2q^3 - 3q^2 - q + 1 = 0$

Пусть  $q = b + \frac{1}{2}$

Тогда  $2b^3 - \frac{5}{2}b = 0$

$q = -1$

$b = 0$   
 $b = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$   
 $q = -1$

⑦

С учетом значений

$q = 1$

$q = \frac{1}{2}$

$q = \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 1$  невозможно найти  $\sin$

$q = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Тогда

$x = \frac{3\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

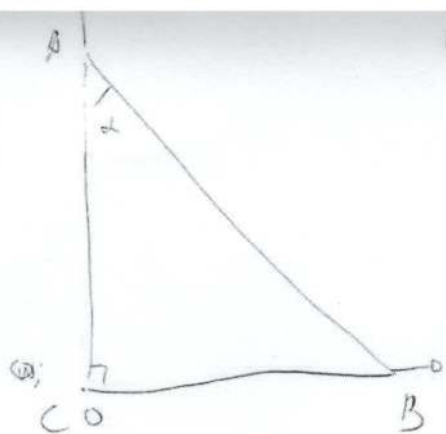
$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi a, a \in \mathbb{Z}$

$x = \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi e, e \in \mathbb{Z}$

$x = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi r, r \in \mathbb{Z}$



11.2



Рассмотрим ABC.

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= (b; 0) & AC &= b \\ B &= (0; a) & BC &= a \\ C &= (0; 0) & AB &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$2) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \operatorname{tg} \alpha$$

$$3) \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} b \cdot a = \frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

где центр окружности на чертеже?

Координаты  $O_1 = \left( \frac{b}{2}, -\frac{b}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right)$   $O_2 = \left( -\frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2}, \frac{b}{2} \right)$  Почему?

M - середина гипотенузы  $M \left( \frac{b}{2}, \frac{a}{2} \right) = \left( \frac{b}{2}, \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2} \right)$

$$4) \quad S_{O_1 O_2} = \frac{1}{2} \left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$$

Где объяснение этой формулы? что в ней играют переменные?

$$x_1 = \frac{b}{2} \quad y_1 = -\frac{b}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad x_2 = \frac{b}{2} \quad y_2 = \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2} \quad x_3 = -\frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2} \quad y_3 = \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

$$S_{O_1 O_2} = \frac{1}{2} \left| \frac{b}{2} \left( \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2} \right) + \frac{b}{2} \left( \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{b}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) + \right.$$

$$\left. - \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2} \left( -\frac{b}{2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{2} \right) \right|$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Получим

$$S_{O_1 O_2} = \frac{b^2 \sec^4 \alpha}{8 \operatorname{tg} \alpha}$$

Как получено?  
данное выражение.  
не приведено  
вычисления

5) Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{O_1 O_2}} = \frac{\frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}}{\frac{b^2 \sec^4 \alpha}{8 \operatorname{tg} \alpha}} = \frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} \cdot \frac{8 \operatorname{tg} \alpha}{b^2 \sec^4 \alpha} =$$



$$= \frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sec^4 \alpha} = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$$

11.3.

$$ax^4 + bx - c = 0$$

$$f(x) = ax^4 + bx - c$$

$$f(-1) = a - b - c < 0$$

по кр-му  $\Delta$   $a+b > c$  и  $b+c > a$

Значит  $a+b-c > 0$  и  $a-b-c < 0$

$$\text{Значит, что } f(0) = -c \leq 0 \text{ и } f(1) = a+b-c > 0$$

Отсюда существует корень на промежутке  $(0, 1)$ , т.к. функция непрерывна на промежутке и меняет знак. Тогда

докажем, что существует  $x$ , что  $f(x) > 0$  и  $x < -1$

Тогда  $a \cdot x^4 + bx - c > a \cdot x^2 + bx - c > 0$ , где  $a > b$  опуска?

$$D = b^2 + 4ac, \text{ тогда } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \text{ Если брать любое}$$

$$x < -1 \text{ и } x < \frac{\sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a}, \text{ то по рассуждению}$$

$$\text{имеем } f(x) > 0$$

$$\text{и } f(x) > 0 \text{ есть корень } < 0, \text{ который } < -1$$

Отсюда опуска? ~~корень~~ модуль отриц-ого корня не меньше  $-1$  и он больше опуска?

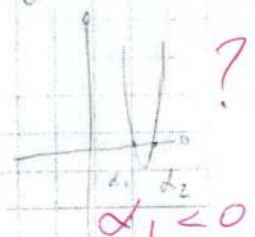
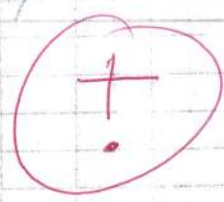
найдённого положительного. Докажем это корень только

$$\text{в. Возьмём } S = f'(x) = 4ax^3 + b = 0. \text{ Следует,}$$

$$\text{что } x = \pm \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}}, \text{ т.е. функция имеет не более 2-х}$$

$$\text{корней, т.к. л.в.е. монотонно } \uparrow \text{ при } x > -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$$

$$\text{и монотонно } \downarrow \text{ при } x < -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$$



11.4) а)  $9 \cdot x^{6x} - 1 = 0$   $\left[ \begin{array}{l} 3x^{3x} = 1 \\ 3x^{3x} = -1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} x^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} \\ x^x = \left(-\frac{1}{3}\right)^{1/3} \end{array} \right]$   $x^x > 0$  !  
 при  $x > 0$  !  
 $x^x = \left(-\frac{1}{3}\right)^{1/3}$  - значит тут нет корней

Пусть  $f(x) = x^x - \frac{1}{3}^{1/3}$   $f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$

$\ln x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

Значит  $f(x)$  - убывает на промежутке от  $[0; \frac{1}{e}]$  и возрастает на промежутке  $[\frac{1}{e}; +\infty)$ . Отсюда следует, т.к.  $f(x)$  уходит в бесконечность при больших  $x$ , то каждое значение  $f(x_0)$   $x_0 \in [0; \frac{1}{e}]$ , она принимает дважды в силу монотонности и непрерывности  $\frac{1}{e} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \in [0; \frac{1}{e}) \Rightarrow f(x)$  дважды принимает значения  $f(\frac{1}{3}) \Rightarrow$  всего 2 положительных корня

б)  $x^{6x}$  определено при  $x > 0$ , т.к. это показательная функция. Значит отсюда следует, что корней  $\leq 0$  нет. Не исследовать  $x < 0$ .

пункт а) +  
пункт б) -

+1/2