



ШИФР

а К - 11

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ

(наименование общеобразовательного предмета)

Дата проведения 19.01.2025

ФИО участника (полностью) ДОЛГОШЕЙ РОМАН СТАНИСЛАВОВИЧ

Дата рождения

Класс 11

Школа № ФМЦ СФУ

район

город Красноярск

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.дон. гербовик, +1
дон. гербовикпредусмотренного на подачу и рассмотрение апел-
ляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист
«Письменная работа», ставит дату и подпись.На вложенных листах, как для чистовых, так и для
черновых записей, можно писать или синей, или фио-
летовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой
во всей работе (при необходимости смены цвета пасты
(чернил), следует обратиться за разрешением к пред-
ставителю оргкомитета олимпиады).Задания (или часть задания), выполненные на листах,
на которых имеются рисунки или записи, не относя-
щиеся к выполняемому заданию, а также записи не на
русском языке, и любые другие пометки, которые мо-
гут идентифицировать участника, на проверку не по-
ступают и претензии по этим заданиям (задачам) не
принимаются. На проверку не поступают также листы,
подписанные участником, листы, на которых имеются
записи карандашом (кроме рисунков, необходимых
для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные)
листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены каран-
дашом, то при шифровке работы карандашные ис-
правления будут стерты и на проверку поступит ра-
бота без исправлений.С правилами поведения на олимпиаде и правилами
оформления работы ознакомлен

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных ра-
бот, жюри обнаружит идентичный текст (или
цитаты с одинаковыми грамматическими, речевы-
ми или смысловыми (фактическими) ошибками) в
двух, или более работах, то за эти работы баллы не
начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также лю-
бого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участ-
ник удаляется с очного тура олимпиады с выстав-
лением нуля баллов за выполняющуюся работу неза-
висимо от числа правильно выполненных заданий.

..... участника олимпиады)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N1

СТ/О 1

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$$

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x - \sin^3 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x (\cos^2 x -$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 + \sin^4 x - 2\sin^2 x) - \sin^3 x - 1 = 0$$

Пусть $\sin x = t$, $|t| \leq 1$

$$2(1 + t^4 - 2t^2) - t^3 - 1 = 0$$

$$2t^4 - 4t^2 + 2 - t^3 - 1 = 0$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

Заметим, что ур-е имеет корни $\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$(t+1)(t-\frac{1}{2})(t^2-t-1) = 0$$

Решим $t^2 - t - 1 = 0$

$$D = 1 + 4 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ так как, что}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \text{не подходит,}$$

Остается $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ экв. решаем. Тогда

и тогда $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = +\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \arcsin(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + 2\pi k, x = \pi - \arcsin(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

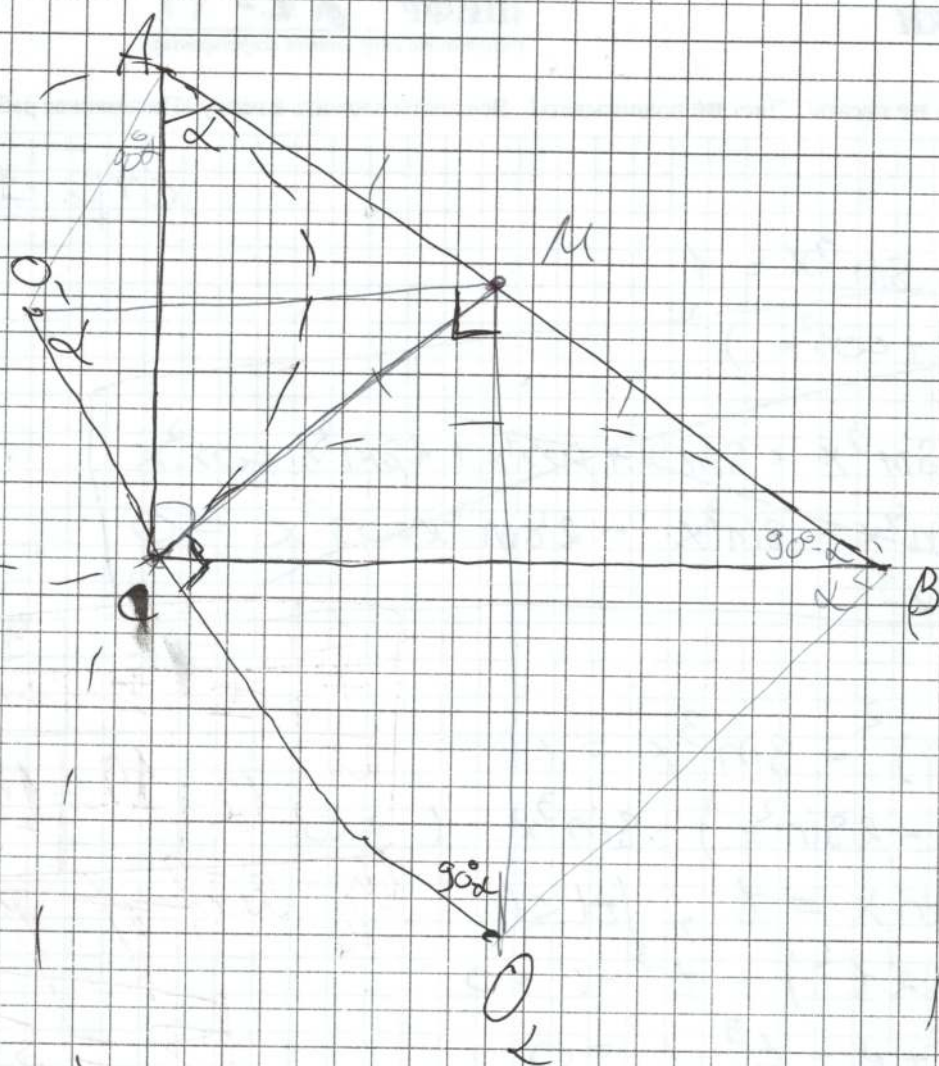
1	2	3	4	5
+	±	±	+1/2	-
20	12	12	10	2
20	12	12	10	2

$$\Sigma = 56$$

(+)

№2

стр 2.



Нетрудно понять, что окружности из усл. касаются в т. C ($\angle O_2CB = \angle O_2BC = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$, а $\angle O_2CA = \angle O_2AC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle O_2CA + \angle BCO_2 + \angle ACB = 180^\circ \Rightarrow O_1, C, O_2$ коллинеарны, а такое бывает только при касании) \neq

2) Ясно, что CM — касательная к окружности ($CM = MB = MC$) $\Rightarrow O_2M, O_1M$ — биссектрисы $\angle CO_2B = \angle AOC$ по тв-ию $\Rightarrow \angle O_2M = 90^\circ - \alpha$, $\angle O_1M = \alpha$

№2. Продолжение

СТР. 3

Значит $\triangle O, MO_2 \sim \triangle ACB$ и $\angle B, MO_2 = 90^\circ$

Пусть R_1 - радиус окружности с центром O ,
Тогда

В $\triangle O, CM$ (очевидно $\triangle O, CM$ - прямой, т.к. радиус в т. кас. перп. к касательной) :

$$CM = \frac{1}{2} AB \Rightarrow O, M = \frac{CM}{\sin \alpha} = \frac{AB}{2 \sin \alpha},$$

$$\text{в } \triangle ABC : AC = \frac{AB}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{O, M}{AC} = \frac{2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$$

$$= \frac{AB}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{AB} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow S(ABC) : S(O, MO_2)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha \right)^2 \right)^{-1} = (2 \operatorname{tg} \alpha)^2 = 4 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\text{Ответ: } \underline{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

№3

$$ax^4 + bx - c = 0 \Rightarrow \text{пусть } f(x) = ax^4 + bx - c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + b, \quad f'(x) = 0 \text{ имеет 1 корень}$$

\Rightarrow по Тн. Ролля $f(x) = 0$ имеет ≤ 2 корней.

Теперь заметим, что при $x \rightarrow \pm \infty : f(x) \rightarrow \infty$,

а $f(0) < 0 \Rightarrow \exists 2 \text{ корня} \Rightarrow$ у уравн $f(x) = 0$
ровно 2 корня, причем разных знаков

$\frac{f(0)}{f'(0)} < 0$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

М1 Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ стр 5.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k, x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

№ 4

$$9 \cdot x^{6x} = 1 \Rightarrow x^{6x} = \frac{1}{9}$$

Сразу заметим, что $D(f) = (0; +\infty)$

где $f(x) = x^{6x} \Rightarrow$ отрыв. корнями нех.

$$(x^x)^6 = \frac{1}{9} \Rightarrow x^x = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

$$\text{Пусть } f(x) = x^x, f'(x) = x^x(1 + \ln x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}. \text{ Ясно, что}$$

на $(0; \frac{1}{e}] f \downarrow$, на $[\frac{1}{e}; +\infty) f \uparrow$.

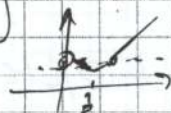
Заметим, что $\sqrt[6]{\frac{1}{9}} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$. т.к.

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{e}, \text{ но } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \Rightarrow \text{у ур-я } x^x = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

есть корни (т.к. $\sqrt[6]{\frac{1}{9}} < 1$, а $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$.)

Причем ясно, что один корень левее $\frac{1}{e}$, другой - правее.

Ответ: а) 2 б) 0.



или 0)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№3. Продолжение

стр 4.

Осталось док-ть, что отриц. корни не могут быть больше нуля:

Пусть x_1 - отриц. корень, x_2 - корень.

Теперь заметим, что при $x > 0$ функция растёт быстрее, чем при $x < 0$ (т.к. при $x < 0$ её ~~ещё~~ положительный от положи ax^4 отнимем отриц. слагаемое $(bx - c)$)

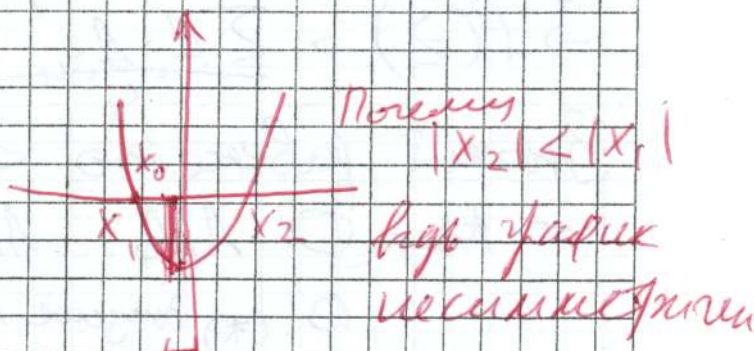
\Rightarrow Расстояние от $x_0 = -\sqrt[3]{\frac{b}{3a}}$ (корень произвольной \rightarrow минимум) до x_1 будет больше, чем до x_2 . Тогда

$$f(0, x_1) \geq f(0, x_2 - \sqrt[3]{\frac{b}{3a}} - x_2) + \Delta >$$

$$> f(x_2) \Leftrightarrow x_2 = a \text{ т.к. } -\sqrt[3]{\frac{b}{3a}} < 0,$$

то и растёт от 0 до x_1 будет больше, чем до $x_2 \Leftrightarrow |x_1| > |x_2|$

ч.т.д



N5

СТР 6



Если M_i совпадает с серединой $A_i A_{i+1}$,
то утверждение очевидно, т.к.
тогда $A_i M_i^2 = \frac{A_i A_{i+1}^2}{4} \Rightarrow$ РАВЕНСТВО

выполняется и $M = O$ т.к. $M M_i$ - сеп. пер.

Докажем, что равенство $4 \sum_{i=1}^n A_i M_i^2 = \sum_{i=1}^n A_i A_{i+1}^2$

выполняется только для точки O .

Заметим, что квадрат расстояния между
2-мя точками - выпуклая ф-я

$\Rightarrow 4 \sum A_i M_i^2$ - сумма выпуклых ф-ий

$\Rightarrow 4 \sum A_i M_i^2$ - выпуклая ф-я (вкуп)

$$f\left(\frac{A_i}{2}\right) = f\left(0, \sum_{i=1}^n p(z, A_i A_{i+1})\right)$$

Известно, что $\min f = f(0)$, а отсюда
следует
известно?

т.к. минимум у вып. вкуп. функции
единственный (*), то $\forall z \neq O \quad f(z) > f(0)$

$$\Rightarrow f(z) > \sum_{i=1}^n \frac{A_i A_{i+1}^2}{4} \Rightarrow \text{и.т.д.}$$

Значит равенство \Leftrightarrow все M_i - сеп. пер.
 $\Rightarrow M = O \quad A_1, A_2, \dots, A_n$ впис., а $M = O$.

В. (*) Выпуклая мн-во, но в данном случае,
она является ТОЧКА