



ШИФР

aT-2

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИпо математике Дата проведения 19.01.2024
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО участника (полностью) Туркин Александр Игоревич

Дата рождения _____

СНИЛС _____

Класс 11Школа № 64 (лицей) район Центральный город Омск

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по
письменному заявлению после истечения времени,
предусмотренного на подачу и рассмотрение апел-
ляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист
«Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для
черновых записей, можно писать или синей, или фио-
летовою, или черной пастой (чернилами), одинаковой
во всей работе (при необходимости смены цвета пасты
(чернил), следует обратиться за разрешением к пред-
ставителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах,
на которых имеются рисунки или записи, не относя-
щиеся к выполняемому заданию, а также записи не на
русском языке, и любые другие пометки, которые мо-
гут идентифицировать участника, на проверку не по-
ступают и претензии по этим заданиям (задачам) не
принимаются. На проверку не поступают также листы,
подписанные участником, листы, на которых имеются
записи карандашом (кроме рисунков, необходимых
для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные)
листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены каран-
дашом, то при шифровке работы карандашные ис-
правления будут стерты и на проверку поступит ра-
бота без исправлений.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных ра-
бот, жюри обнаружит идентичный текст (или
цитаты с одинаковыми грамматическими, речеви-
ми или смысловыми (фактическими) ошибками) в
двух, или более работах, то за эти работы баллы не
начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участ-
ник удаляется с очного тура олимпиады с выстав-
лением нуля баллов за выполнявшуюся работу неза-
висимо от числа правильно выполненных заданий.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами
оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

ШИФР

AT-2

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	+	0
20	20	8	3	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество НЕ писать! Лист НЕ подписывать!

$\Sigma = 51$

V14.1.

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2(\cos^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

Пусть $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$

$$2 - 4t^2 + 2t^4 - t^3 = 1$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$(t+1)(2t^3 - 3t^2 - t + 1) = 0 \quad ? \text{ корень}$$

$$(t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right)(2t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$(t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right)(t^2 - t - 1) = 0 \quad ?$$

$$t = -1 \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad t^2 - t - 1 = 0$$

$$\sin x = -1 \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Delta = 1 + 4 = 5$$



$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$1 + \sqrt{5} > 2, \text{ но } 1 + \sqrt{5} > 1 + 2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2} \Rightarrow t - \text{норм. в м.к. } t \leq 1$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1-2}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1-3}{2}$$

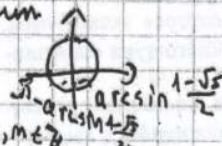
$$-\frac{1}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -1$$

(V) найдем

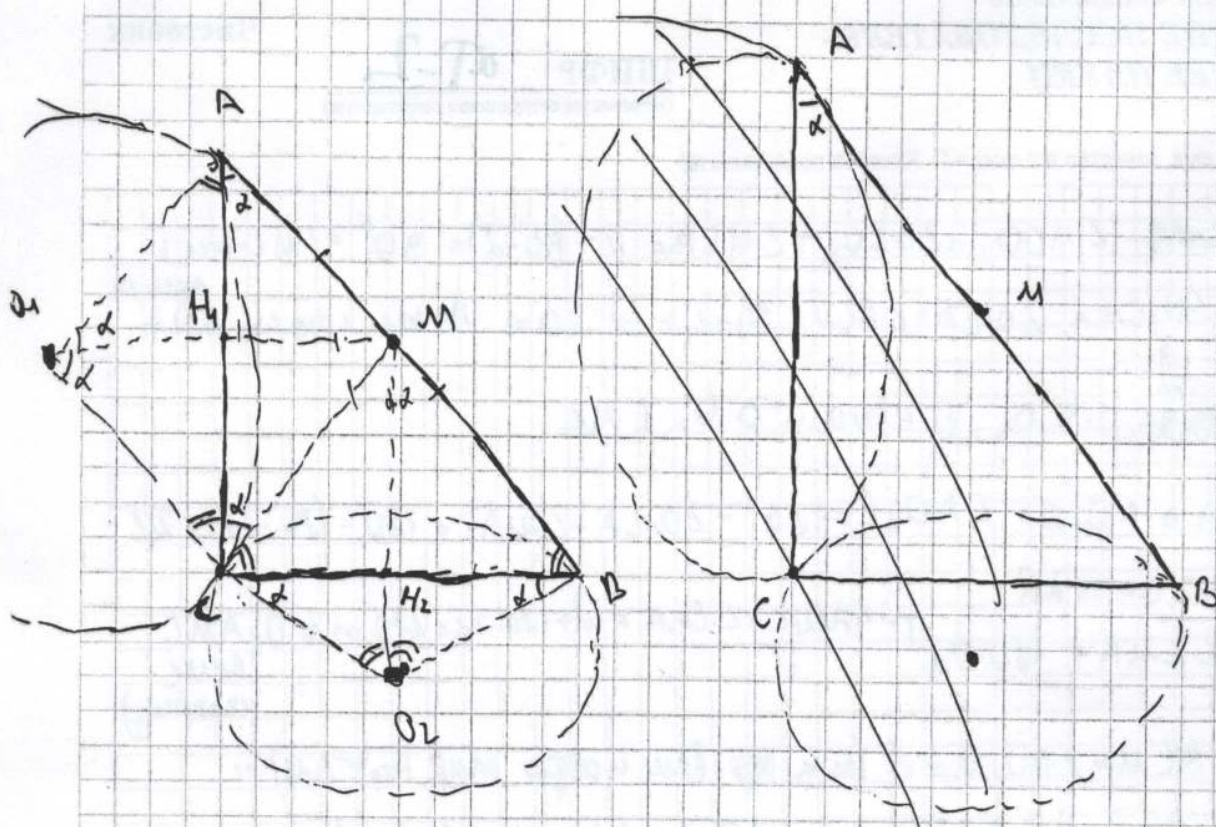
$$\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_4 = \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x_5 = -\pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x_4 = \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi m$; $x_5 = -\pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi m$ $\left| \begin{smallmatrix} \text{где} \\ k, n, m \in \mathbb{Z} \end{smallmatrix} \right.$



Решение:

1) $\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - \alpha$

2) $AB \perp AC$
 $CO_2 \perp AB$ $\Rightarrow \angle O_2BA = 90^\circ$ (по с. б. у.) $\Rightarrow \angle CBO_2 = \angle O_2BA - \angle CBA = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$

3) ΔCO_2B

$\angle CO_2B = \angle BO_2C$ (по у.) $\Rightarrow \Delta CO_2B$ - р/б (по оп.) $\Rightarrow \angle O_2CB = \alpha$

3) Аналогично:

~~АМ-медиана~~

$AM \perp BC \Rightarrow \angle O_1AM = 90^\circ \Rightarrow \angle O_1AC = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \alpha$

4) CM - высота медианы $\Rightarrow AM = MB = CM$ (по с. б. у.) $\Rightarrow \Delta CMB$ - р/б \Rightarrow

$\Rightarrow \angle MBC = \angle MCB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle CMB = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AMC = 180^\circ - \angle CMB = 180^\circ - 2\alpha$ (м. к. с. м. н.)

Аналогично ΔAMC - р/б $\Rightarrow \angle CAM = \angle MCA = \alpha$

Фамилию, имя, отчество **НЕ** писать! Лист **НЕ** подписывать!

5) $\angle MCO_2 = \angle BCO_2 + \angle MCB = \alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ \Rightarrow MC \perp BO_2$
 $\angle O_1CM = \angle O_1CA + \angle ACM = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ \Rightarrow MC \perp CO_1$
 $\Rightarrow MC \perp BO_2$ и $MC \perp CO_1$ (по св-ву)

6) $O_1, O_2, C \in BO_1$ и $O_1, O_2 \in MC$

7) из $\triangle AO_1C$: $\angle AO_1C = 180^\circ - \angle O_1CA - \angle O_1AC = 180^\circ - (90^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$

8) $\angle AO_1C = 2\alpha$
 $\angle CMA = 180^\circ - 2\alpha$
 $\angle AO_1C + \angle CMA = 2\alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow A, O_1, M, C$ (напрямую)

9) $\angle ACM = \angle AO_1M = \alpha$ (м-н. MC висс и BO_2 \perp на AM)
 $\angle AO_1C = 2\alpha \Rightarrow \angle MO_1C = \angle AO_1C - \angle AO_1M = 2\alpha - \alpha = \alpha$

10) AO_1C - \triangle
 O_1H_1 - висс (где H_1 - точка пересек. AC и AO_1M) $\Rightarrow O_1H_1$ висс, MC (по св-ву)

11) аналогично $CM \perp BO_2$ висс ($\angle CMB = 2\alpha$, $\angle CO_2B = 180^\circ - 2\alpha$ из $\triangle CO_2B$)
 $\Rightarrow \angle MO_2B = \angle MCB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle MO_2B = \angle MO_2C$ (по св-ву)
 $\Rightarrow MC \perp BO_2$ - O_2H_2 - висс, висс, MC .

12) O_1, O_2, M

$\angle O_1MO_2 = 180^\circ - \angle MO_1C - \angle MO_2C = 180^\circ - 2\alpha - (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ$

13) $\angle O_1MO_2 = \angle ACB = 90^\circ$

$\angle CAB = \angle MO_1O_2 = \alpha$

$\angle ABC = \angle MO_2O_1 = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle O_1O_2M$ (по 3-му) \Rightarrow

$\Rightarrow k = \frac{AB}{O_1O_2}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1O_2M}} = k^2$ (*)

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

13) проведем $O_1A \perp O_2A$

$O_1H \perp O_2A$
 $AB \perp O_2A$ $\Rightarrow O_1H \parallel AB$

$O_2A \perp AB$
 $O_1B \perp AB$ $\Rightarrow O_2A \parallel O_1B$, т.е. $HA \parallel AB$

~~ОАААА~~

$HA \perp O_2B$
 $O_1H \parallel AB$ $\Rightarrow O_1H \perp AB$ — пер-м (перпенд.)

$\angle A O_2 A B = 90^\circ \Rightarrow O_1H \perp AB$ — пер-м $\Rightarrow O_1H = AB$

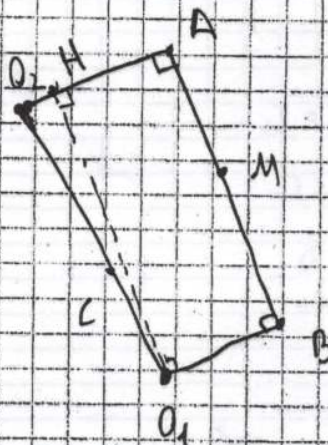
14) $\angle \cap O_1 O_2 A$

$$\frac{HO_1}{O_1O_2} = \sin \angle A O_2 O_1 = \frac{AB}{O_1O_2}$$

$$\angle A O_2 O_1 = 2\alpha \Rightarrow \frac{AB}{O_1O_2} = \sin 2\alpha$$

15) (*) $\frac{S_{ABC}}{S_{AO_2M}} = \left(\frac{AB}{O_1O_2}\right)^2 = \boxed{\sin^2 2\alpha}$

Ответ: $\sin^2 2\alpha$



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

1.1.3.

$$ax^4 + bx = c$$

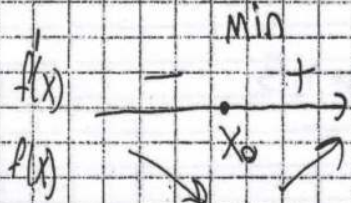
$$y = ax^4 + bx - c$$

$$y' = 4ax^3 + b$$

$$y' = 0$$

$$x^3 = -\frac{b}{4a}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}} = x_0, \quad x_0 < 0, \quad \text{т.к. } \frac{b}{4a} > 0, \quad \text{т.е. } -\frac{b}{4a} < 0$$



случай 1: $b = 4a$

$$x_0 = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$y(x_0) = a - b - c = a - (b + c)$$

по нер. бу тр-ка

$$a < b + c \Rightarrow a - (b + c) < 0 \Rightarrow y(x_0) < 0 \Rightarrow$$

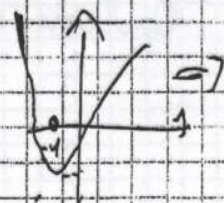
\Rightarrow уравн. пр-н имеет 2 корня

\Rightarrow уравнение имеет 2 корня

случай 2: $b > 4a$, т.е. $x_0 < -1, |x_0| > 1$, по нер. бу тр-ка: $c > 3a$

$$y = ax^4 + bx - c = a|x_0|^4 - b|x_0| - c$$

$$a|x_0|^4 - b|x_0| - c < 0$$



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

11.4.

$$3 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

~~х > 0~~ ~~находим~~

~~х > 0~~

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{3} \\ x &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ x &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Пусть $x > 0$ тогда $x^{\frac{1}{3}} > 0$

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$x = \frac{1}{27}$$

Заметим, что при $x = \frac{1}{27}$: $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ т.е. $x = \frac{1}{27}$ - корень

$$\sqrt[3]{3} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{3}} < 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} < 1 \Rightarrow x < 1$$

и при x уменьшении $x^{\frac{1}{3}}$ ~~уменьшается~~ ^(отнес к $\frac{1}{3}$) ~~становится~~

~~корень~~ $\Rightarrow x^{\frac{1}{3}} \rightarrow 1 \Rightarrow x \rightarrow 1$ ~~не подходит~~

Поэтому $x = \frac{1}{27}$ является корнем

~~и~~

~~и~~

~~и~~