



ШИФР

(заполняется членом оргкомитета или тех.секретариата)

## Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников  
«БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ»по математике в 11 классе  
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО Сверчков Михаил Сергеевич  
(полностью! в именительном падеже)

Дата рождения

Школа Лицей при ЛГПУ им. П.П. Сенинова - Там - Мамыногорайон \_\_\_\_\_ город Иркутск**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)  
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.Дата проведения 19.01.2025**Правила поведения**

Участник олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано организаторами в аудитории;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ жюри обнаружит идентичный текст (или текст с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- иметь при себе любые средства мобильной связи, включая смартфон, микрофон, наушники, смарт-часы и пр.;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

**Оформление работы**

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной ручкой, одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета ручки следует обратиться за разрешением к организатору в аудитории).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

**Нельзя делать исправления карандашом.****С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен**

(подпись участника олимпиады)



ШИФР

Va 2

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	-	-
20	20	8	3	2

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

511.1

①

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1.$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1.$$

$$2(\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1) - \sin^3 x = 1.$$

$$2\sin^4 x - 4\sin^2 x + 2 - \sin^3 x = 1.$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0. \text{ Пусть } t = \sin x,$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0. \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Проверим  $t = -1$ :  $2 + 1 + 1 - 4 = 0$  - корень.

$$\begin{array}{r|l} 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 & t+1 \\ - 2t^4 + 2t^3 & \\ \hline -3t^3 - 4t^2 + 1 & \\ - -3t^3 - 3t^2 & \\ \hline -t^2 + 1t + 1 & \\ - -t^2 - t & \\ \hline t + 1 & \\ - t + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = (t+1)(2t^3 - 3t^2 - t + 1) = 0.$$

$$2t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0.$$

$$t^3 - \frac{3t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Проверим  $t = \frac{1}{2}$ :  $\frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0$   
- корень



2



$$\Rightarrow 2t^3 - 3t^2 - t + 1 \quad \left| \begin{array}{r} 2t-1 \\ \hline t^2 - t - 1 \end{array} \right.$$

$$- 2t^3 - t^2$$

$$\hline - 2t^2 - t$$

$$- -2t^2 + t$$

$$\hline - 2t + 1$$

$$- -2t + 1$$

$$\Rightarrow 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = (t+1)(2t-1)(t^2 - t - 1) = 0$$

$$* t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5.$$

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$$

Углов, найдем

$$\left[ \begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi d, d \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi b, b \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ответ:

511.4.

$$a) 9 \cdot x^{6x} = 1.$$

Заметим, что  $x > 0$  т.к. основание показательной функции не может быть отрицательным или равным 0 по определению. (пример:  $9 \cdot (-\frac{1}{12})^{-2} = 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$ )

$$x^{6x} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 x^{6x} = \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 x^{6x} = -2$$

$$6x \log_3 x = -2$$

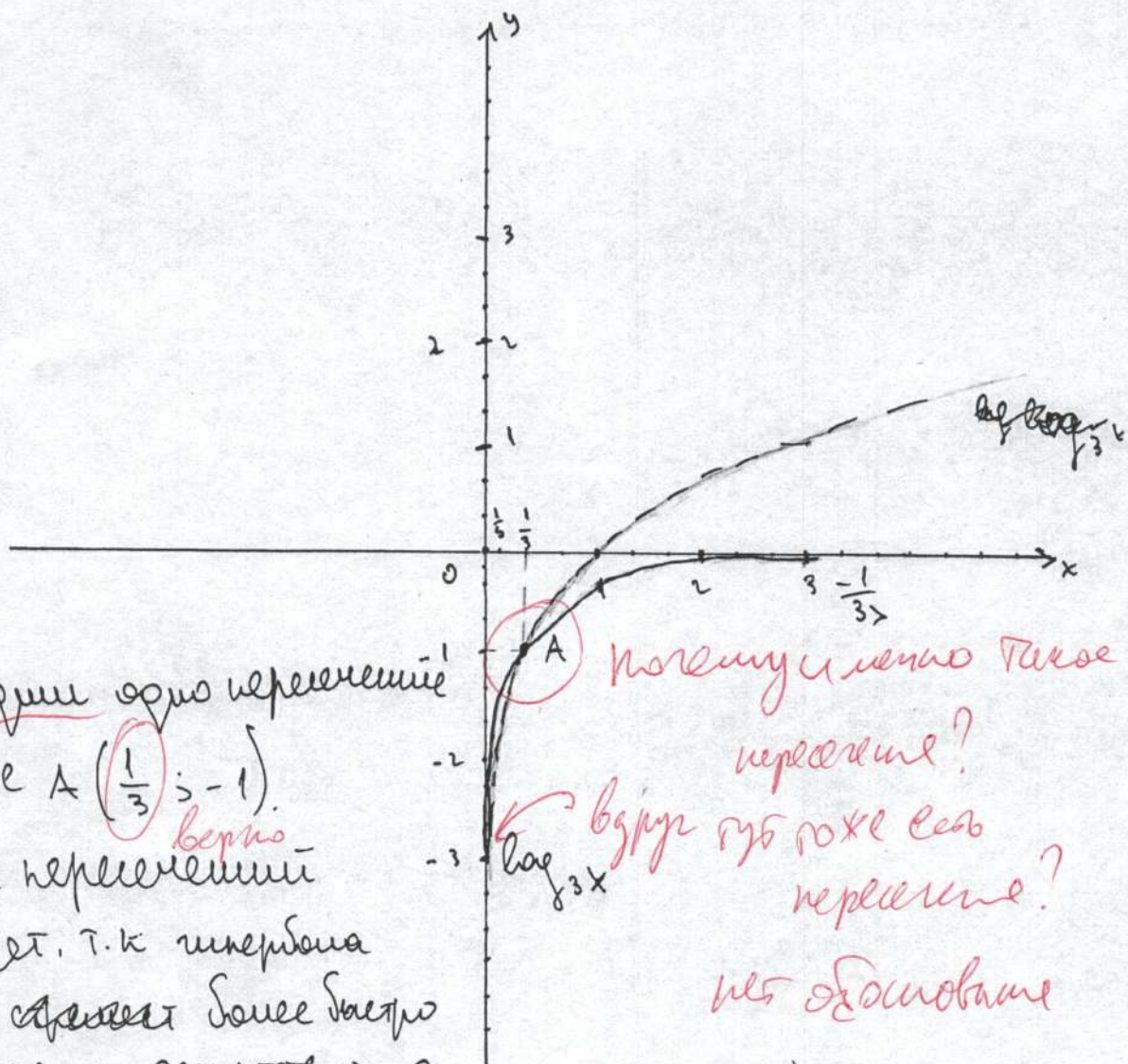
$$\log_3 x = \frac{-1}{3x}$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -1 \\ 9 \cdot (-1)^{6 \cdot (-1)} = 9 \end{array} \right]$$



(3).

Изобразим графики данных функций.



Мы видим одно пересечение  
в точке  $A\left(\frac{1}{3}; -1\right)$ .

Далее пересечений  
не будет, т.к. гипербола  
быстро стремится к асимптоте  $x=0$ .  
меньше логарифм.

В начале а) было сказано, что  $x > 0$ .

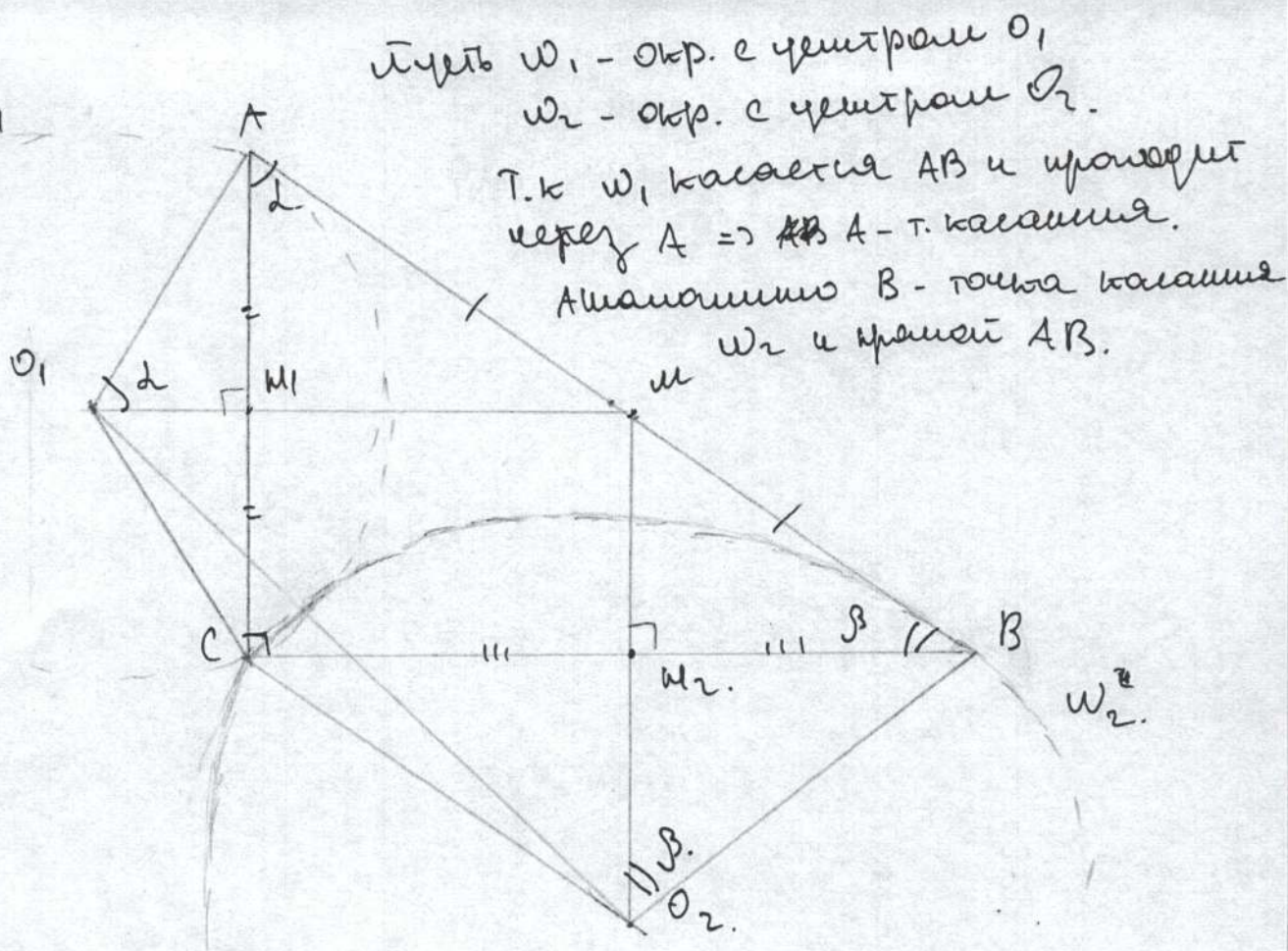
ответ: а) 1 корень б) нет

511.2.





(4)  $\omega_1$



Пусть  $\omega_1$  - окр. с центром  $O_1$   
 $\omega_2$  - окр. с центром  $O_2$ .

Т.к.  $\omega_1$  касается  $AB$  и проходит  
 через  $A \Rightarrow A$  - т. касания.

Аналогично  $B$  - точка касания  
 $\omega_2$  и стороной  $AB$ .

$\triangle CO_1A$ :  $CO_1 = O_1A \Rightarrow \triangle CO_1A$  - равнобедренный.  
 (как радиусы)

Окружности  $O_1H_1 \perp AC$ .  $CH_1 = H_1A$  (т.к.  $O_1H_1 \parallel CB$ ) }  $\Rightarrow O_1H_1 \cap AB = M$ .

Аналогично:  $O_2H_2 \perp CB$

$CH_2 = H_2B$  }  $\Rightarrow O_2H_2 \cap CB = M$ .  
 $O_2H_2 \parallel AC$

$O_2M \perp O_1M$  (т.к.  $O_2M \perp CB$ , а  $O_1M \parallel CB$ )  $\Rightarrow \angle O_1MO_2 = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \triangle O_1MO_2$  - прямоугольный.

$\angle AO_1C = 2\alpha$  (по т. о центр между хордой и касательной)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AO_1H_1 = \alpha$ . Т.к.  $O_1H_1$  - биссектриса.

Пусть  $AC = b$ ,  $CB = a$ . Тогда:  $AH_1 = \frac{b}{2}$ .  $\tan \alpha = \frac{AH_1}{O_1H_1}$

$\Rightarrow O_1H_1 = \frac{AH_1}{\tan \alpha} = AH_1 \cot \alpha = \frac{b \cot \alpha}{2}$

$H_1M$  - ср. линия  $\triangle ABC$  ( $CH_1 = H_1A$ ,  $BM = MB$ )  $\Rightarrow H_1M = \frac{a}{2}$



(5)



Аналогично получаем:

$$O_2 M_2 = \frac{M_2 B}{\sin \beta} = M_2 B \operatorname{ctg} \beta = \frac{a \operatorname{ctg} \beta}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow O_1 M = \frac{b + a \operatorname{ctg} \beta}{2}$$

$M M_2$  - ср. линия  $\triangle ABC$

$$\parallel \frac{b}{2}$$

$$S_{\triangle O_1 M O_2} = \frac{1}{2} O_1 M \cdot O_2 M = \frac{1}{2} \left( \frac{b + a \operatorname{ctg} \beta}{2} \right) \left( \frac{a + b \operatorname{ctg} \alpha}{2} \right) =$$

$$= \left( ab + b^2 \operatorname{ctg} \alpha + a^2 \operatorname{ctg} \beta + ab \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \right) \cdot \frac{1}{8}$$

по  $\beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow S_{\triangle O_1 M O_2} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \alpha + 2ab}{8}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab$$

$$\frac{S_{\triangle O_1 M O_2}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \alpha + 2ab}{8} \cdot \frac{2}{ab} =$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \alpha + 2ab}{ab} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha + \frac{b}{a} \operatorname{ctg} \alpha + 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2 \right)$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4} (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2) \quad \color{red}{+}$$

или 3.

Рассмотрим функцию  $f(x) = ax^4 + bx - c$ ,  
где  $a, b, c$  - стороны  $\triangle$ ,  $a, b, c > 0$ .

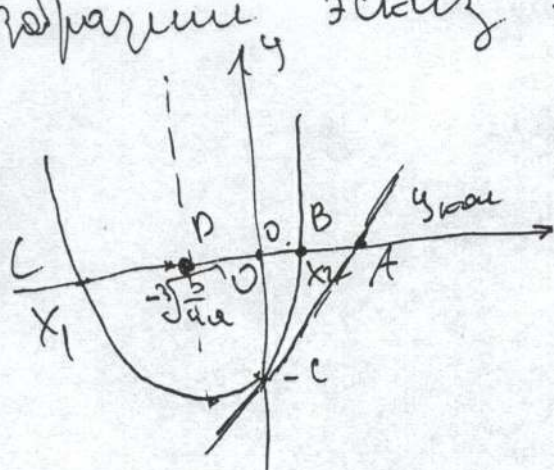
$$f'(x) = 4ax^3 + b$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4ax^3 = -b \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}} < 0 \text{ - точка мин. (т.к. } a, b > 0 \text{)}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \quad \quad \quad + \quad \quad \quad \nearrow \\ \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} \quad \quad \quad x \quad \quad \quad f(x) \end{array}$$



6. Изобразим эскиз  $f(x)$ .



$$f\left(-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}\right) < 0$$

$$\text{т.к. } f\left(-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}\right) < -c < 0.$$

т.н.н.

$f(x)$  будет пересекать прямую  $y=0$  ровно в трех точках

примем один из них отрицательный, а другой положительный. Ч.Т.Д.

Проведём касательную к  $f(x)$  в точке  $x_0 = 0$ .

$y_{кас} \cap y=0 = A$ . Если  $A < \sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , то и  $B < \sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ .

$$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = bx - c.$$

$$y_{кас} = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{b}.$$

$$\frac{c}{b} < \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} \Leftrightarrow \frac{c^3}{b^3} < \frac{b}{4a} \quad | \cdot 4ab \Rightarrow 4ac^3 < b^4.$$

т.к.  $b^2 > a + c$ , то  $b^4 > (a+c)^2$

нелик

$f(x)$  - симметрична относительно  $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$  (см. эскиз)

имеет  $P\left(-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}; 0\right)$ , тогда  $CP = PB$ , но  $PB = PO + OB$

$$CP = PO + OB \Rightarrow |OB| < |PC| \Rightarrow |x_1| > |x_2|$$

Ч.Т.Д.



4

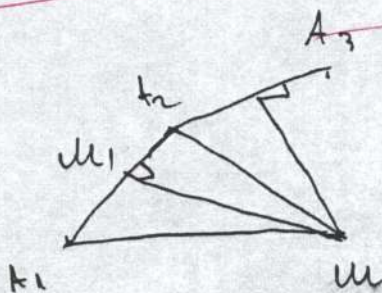


$$4(A_1 M_1^2 + A_2 M_2^2 + \dots + A_n M_n^2) = A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + \dots + A_n A_1^2.$$

$$A_1 A_2^2 - 4 A_1 M_1^2 + A_2 A_3^2 - 4 A_2 M_2^2 + \dots + A_n A_1^2 - 4 A_n M_n^2 = 0$$

$$(A_1 A_2 - 2 A_1 M_1) \underset{\substack{+1 \\ 0}}{A_1 A_2 + 2 A_1 M_1} + (A_2 A_3 - 2 A_2 M_2) \underset{\substack{+1 \\ 0}}{A_2 A_3 + 2 A_2 M_2} - \dots = 0$$

Возможно только при  $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = 2 A_1 M_1 = 2 A_2 M_2 = \dots = 2 A_n M_n = A_n A_1$ .



не верно

$2 A_1 M_1 = A_1 A_2 \Rightarrow M_1$  - середина  $A_1 A_2 \Rightarrow \triangle A_1 M_1 A_2$  - равнобедренный  $\Rightarrow M A_1 = M A_2$

$2 A_2 M_2 = A_2 A_3 \Rightarrow$

$M_2$  - середина  $A_2 A_3 \Rightarrow$

$$M A_1 = M A_2 = M A_3 = M A_n \Rightarrow A_1 A_2 A_3 A_n$$

$A_1 A_2 A_n$  - впис. многоугольн.

$\rightarrow$  опис. многоугольн. опис. ч.т.г.